Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

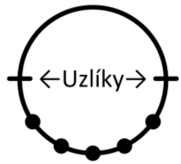
PIKOMAT

34. ročník www.pikomat.sk školský rok 2016/2017

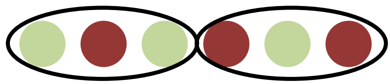
Vzorové riešenia 1. série, kategória 5–7

Úloha M1: Náhrdelník – *Opravovala Simona „Simča" Galková*

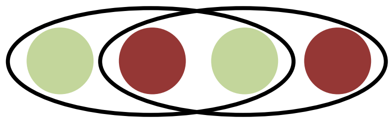
Koráliky na náhrdelníku boli dvoch farieb – zelenej a hrdzavej. Koráliky viseli Jazmíne len pod krkom (podobne ako na obrázku) a nemohli po náhrdelníku voľne kĺzať, lebo ich zadržovali dva uzlíky. Na náhrdelníku bolo zaujímavé, že *žiadna* postupnosť troch po sebe idúcich korálikov nebola rovnaká. **Koľko najviac korálikov mohlo byť na náhrdelníku?**



V tejto úlohe budeme ukladať zelené (označme si Z) a hrdzavé (označme H) koráliky. Chceme zistiť, koľko ich vieme najviac uložiť tak, že žiadna trojica za sebou idúcich korálikov nebude mať rovnakú postupnosť farieb. V prvom rade si treba uvedomiť, že postupnosti troch korálikov sa nenachádzajú len ako trojice priamo za sebou (ako na Obr. 1), ale že sa tieto trojice aj prekrývajú (Obr. 2).



Obr. 1



Obr. 2

Najprv zistíme, koľko rôznych trojíc korálikov vieme vytvoriť použitím zelených a hrdzavých korálikov. Máme tri pozície a na každej môžu byť dve rôzne farby korálikov. Existuje teda $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ rôznych kombinácií. A ktoré to sú? Koráliky môžu byť všetky rovnakej farby, čiže: ZZZ alebo HHH. Alebo môžu byť dva koráliky zelené a jeden hrdzavý, na rôznych pozíciách: ZZH, ZHZ alebo HZZ. A naopak, môžu byť dva hrdzavé a jeden zelený: HHZ, HZH alebo ZHH.

Najviac korálikov bude na náhrdelníku vtedy, keď sa nám tam podarí umiestniť VŠETKY tieto kombinácie. Koľko to teda bude spolu korálikov? Prvá trojica pozostáva z troch korálikov – to je jasné. Avšak na vytvorenie ďalšej trojice nám stačí pridať iba jeden ďalší korálik (ako vidno na Obr. 2). Po prvej trojici chceme umiestniť ešte ďalších 7 trojíc, teda 7-krát pridáme jeden korálik. Keď to spočítame, máme 3+7 = **10 korálikov**.

Na takýto náhrdelník vyčerpáme všetky možné troj-kombinácie, a teda ak by sme pridali akýkoľvek jeden korálik, určite vytvoríme nejakú trojicu, ktorú už náhrdelník obsahuje. Ostáva už iba overiť, že sa koráliky aj naozaj dajú usporiadať tak, aby bolo použitých všetkých 8 trojíc. Na to stačí nájsť aspoň jeden konkrétny príklad: **Z-H-H-H-Z-Z-Z-H-Z-H**.

Bodovanie:

určenie možných troj-kombinácií korálikov – 2b.; správna odpoveď „10" – 1b.; vysvetlenie, prečo je 10 maximum a overenie, že taká postupnosť existuje – 2b.

Úloha M2: Dohoda – *Opravovala Michaela „Jerry“ Dlugošová*

Sedy a Fili sa dohodli, že Sedy bude vždy v pondelok, utorok a stredu klamať a v ostatné dni bude hovoriť len pravdu. Fili naopak bude vo štvrtok, piatok a sobotu klamať a v ostatné dni bude hovoriť len pravdu. **Ktoré dni môžu Sedy aj Fili povedať „Včera som klamal“ a ani jeden tým neporuší dohodu?**

Na začiatok si pre prehľadnosť môžeme spraviť tabuľku, do ktorej si zaznačíme, ktoré dni Sedy a Fili hovoria pravdu a ktoré dni klamú. V akých situáciách sa dá povedať veta „včera som klamal“? Sú vlastne iba dve možnosti. Buď je tá veta pravdivá, alebo je nepravdivá.

1) Ak to hovorím cez (môj) pravdovravný deň, tak to aj musí byť pravda, a teda deň predtým som musel klamať.

	Pon	Ut	Str	Štv	Pia	Sob	Ned
Sedy	*klame*	*klame*	*klame*	pravda	pravda	pravda	pravda
Fili	pravda	pravda	pravda	*klame*	*klame*	*klame*	pravda

2) Ak to vravím cez (môj) klamársky deň, tak to aj musí byť lož, a teda deň predtým som musel, naopak, hovoriť pravdu.

Takže v tabuľke musíme nájsť všetky pravdovravné dni, ktoré majú pred sebou klamársky deň; a tiež vyhľadať všetky klamárske dni, ktoré majú pred sebou pravdovravný deň. Ani sme sa nenazdali a úloha je vyriešená! ☺ **Sedy aj Fili môžu obaja naraz túto vetu povedať jedine vo štvrtok.**

	Pon	Uto	Str	Štv	Pia	Sob	Ned
Sedy	*klame*	*klame*	*klame*	pravda	pravda	pravda	pravda
Fili	pravda	pravda	pravda	*klame*	*klame*	*klame*	pravda

Bodovanie:

správna odpoveď „štvrtok“ s overením, že to vtedy naozaj môžu povedať obaja – 3b.; overenie ostatných dní – 1b.; zdôvodnenie, prečo to žiaden iný deň byť nemôže – 1b.

Úloha M3: Hra – *Opravoval Jakub „Kubo“ Poljovka*

Pani učiteľka priniesla do triedy päť bábik rôznych výšok a postavila ich pred tabuľu zoradené vzostupne podľa výšky. Potom povedala deťom, že výšky bábik v centimetroch sú päť po sebe idúcich párnych čísel. Keď dohovorila, zobrala bábiky a takto ich popresúvala:

1. Najskôr vymenila druhú a predposlednú bábiku.
2. Potom zobrala najnižšiu bábiku a položila ju na koniec radu za najvyššiu.
3. Nakoniec zobrala najvyššiu bábiku a dala ju do stredu (takže naľavo aj napravo od nej boli dve bábiky).

Nakoniec deťom pani učiteľka povedala, že výška druhej bábiky v rade je teraz 5/6 výšky jej suseda. **Aké mohli byť výšky bábik?**

V tejto úlohe je hlavne dôležité nezamotať sa pri presúvaní bábik. Keď nám v nejakej úlohe vystupuje viac predmetov, tak nám pomôže si ich označiť písmenkami. Označme si teda bábiky: najnižšiu ako **A**, druhú ako **B**, tretiu ako **C**, štvrtú ako **D** a najvyššiu ako **E**.

Na začiatku máme bábiky zoradené **ABCDE**. Po prvom kroku, keď vymeníme druhú a predposlednú bábiku, budú zoradené **ADCBE**. Po druhom kroku, keď najnižšiu bábiku (A) položíme na koniec radu za najvyššiu, budú bábiky zoradené **DCBEA**. Po poslednom kroku, keď najvyššiu bábiku (E) položíme doprostred radu, budú bábiky v pozícií **DCEBA**.

Zo zadania si tiež pamätáme, že výšky bábik v centimetroch sú päť po sebe idúcich párnych čísel. Tým pádom **každá bábika je o 2 cm vyššia ako tá predchádzajúca**. Bábika, ktorá je na záver v rade umiestnená ako druhá, je bábika **C**. Podľa zadania má táto bábika výšku 5/6 svojho suseda. V zadaní sa však nepíše, či pani učiteľka myslí suseda vpravo, alebo suseda vľavo. Bábika **C** je nižšia od oboch svojich susedov **D** aj **E** (to si vieme skontrolovať v začiatočnom zoradení), a teda prichádzajú do úvahy obe možnosti. Musíme preto preveriť obe.

<u>Keď bábika **C** má 5/6 výšky bábiky **D**</u>: Podľa pôvodného zoradenia vidíme, že **D** je o 2 cm vyššia ako **C**. Z toho vyplýva, že **jedna šestina výšky bábiky D sú 2 cm**. Bábika **D** má teda výšku: **6 · 2 = 12 cm**. Už si len jednoducho dopočítame, že **A=6; B=8; C=10; D=12; E=14**.

<u>Keď bábika **C** má 5/6 výšky bábiky **E**</u>: Postupujeme celkom rovnako ako v predošlom odseku. Bábika **E** je o 4 cm vyššia ako bábika **C** (podľa pôvodného zoradenia). Tým pádom rovnako ako v predošlom odseku zistíme, že **jedna šestina výšky bábiky E sú 4 cm**. Bábika **E** má teda výšku: **6 · 4 = 24 cm**. Ľahko dopočítame: **A=16; B=18; C=20; D=22; E=24.**

Výšky bábik mohli byť **6**, **8**, **10**, **12** a **14** centimetrov, alebo **16**, **18**, **20**, **22** a **24** centimetrov.

<u>Bodovanie</u>:

správne usporiadanie bábik podľa jednotlivých krokov v zadaní – 0,5b.; jedno riešenie – 1b.; druhé riešenie – 1b.; vysvetlenie postupu riešenia – 2,5b.

Úloha M4: Heslo – *Opravoval Lukáš „Jupiter“ Babula*

„Heslo je zložené z jedného, dvoch alebo troch veľkých písmen abecedy. Heslo je rovnaké keď ho čítame normálne, aj keď ho čítame dole hlavou – celý papier s heslom otočíme o 180°.“ Rudy sa zamyslel. Teraz budú musieť vyskúšať oveľa menej možností. Koľko možností budú musieť vyskúšať so znalosťou indície? Pri riešení úlohy použite túto abecedu: A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z.
Poznámka: Písmeno „M“ dole hlavou nie je „W“ a „W“ dole hlavou nie je „M“. Písmeno „S“ dole hlavou je pre účely úlohy „S“.

Najprv musíme zistiť, ktoré písmená vôbec prichádzajú do úvahy. To znamená zistiť, ktoré písmená aj po otočení dolu hlavou vyzerajú ako písmeno. Sú to **H**, **I**, **N**, **O**, **S**, **X** a **Z** a každé z nich po otočení vyzerá úplne rovnako ako pred otočením (v abecede nemáme žiadne písmená, ktoré by sa otočením zmenili na nejaké iné písmeno).

Vieme, že heslo môže byť zložené z jedného, dvoch, alebo troch písmen. **Heslá zložené z jedného písmena** spočítame veľmi ľahko: **bude ich 7**. Jednoducho preto, lebo existuje iba 7 písmen, ktoré po otočení vyzerajú rovnako.

Dvoj-písmenové heslá sa môžu skladať len z dvoch rovnakých písmen (napríklad „ZZ“). Keby to tak totiž nebolo, čítali by sa dolu hlavou naopak. Napríklad „NI“ už hore nohami dáva „IN“, takže takéto heslo byť nemôže. **Dvoj-písmenových hesiel je preto tiež len 7**.

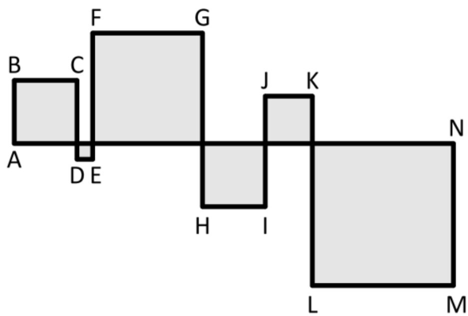
Keď otočíme **troj-písmenové heslo** hore nohami, tak z prvého písmena sa stane posledné a naopak. To znamená, že prvé a posledné písmeno musia byť rovnaké (aby sa heslo čítalo rovnako aj hore nohami). Stredné písmeno pri otočení ostane stále v strede. Takže ku každému stredovému písmenu môžeme vytvoriť 7 hesiel tým, že budeme meniť písmená na krajoch. Napríklad: HNH, INI, NNN, ONO, SNS, XNX, ZNZ. Takto isto by sme mohli vytvoriť 7 hesiel so stredovým písmenom „H“, ďalších 7 so stredovým „I“, a tak ďalej. Stredových písmen môžeme vystriedať 7 a ku každému vieme vytvoriť 7 hesiel, takže máme 7·7 = **49 troj-písmenových hesiel**.

Všetkých možností spolu je 7 + 7 + 49 = 63. Aj keby deti trafili heslo až na posledný pokus, tak **budú musieť vyskúšať nanajvýš 63 možností**.

Bodovanie:
správna odpoveď „63“ – 1b.; vypísanie použiteľných písmen – 1,5b.; vysvetlenie, že dvoj-písmenové heslá musia byť z rovnakých písmen – 1b.; spočítanie troj-písmenových hesiel a odôvodnenie, prečo ich nemôže byť viac – 1,5b.

Úloha M5: Riadiaci pult – *Opravoval Peter „Bubu“ Onduš*

Na jednej časti riadiaceho pultu bol nakreslený diagram, ktorý sa skladal zo šiestich štvorcov, podobne ako na obrázku. Diagram nebol príliš veľký – dĺžka úsečky AN bola 14 cm. Rudy sa zamyslel nad tým, aká bola dĺžka lomenej čiary *ABCDEFGHIJKLMN*. **Aká bola dĺžka lomenej čiary ABCDEFGHIJKLMN?**
Poznámka: Riešenie pomocou meraní dĺžok nebude ohodnotené plným počtom bodov – riešenie by predovšetkým malo obsahovať zdôvodnenie.



Na obrázku máme šesť štvorcov, ktoré ležia po bokoch úsečky AN. Z obvodu každého štvorca je do úsečky AN započítaná práve jedna jeho strana a do lomenej čiary ABCDEFGHIJKLMN sú započítané jeho zvyšné tri strany. Keďže štvorce majú všetky strany rovnako dlhé, tak vidíme, že dĺžka lomenej čiary ABCDEFGHIJKLMN musí byť 3-krát taká veľká ako dĺžka úsečky AN.

Teraz stačí už len vynásobiť dĺžku úsečky AN, čiže 14 cm, troma a zistíme, že lomená čiara ABCDEFGHIJKLMN má dĺžku 14·3 = **42 cm**.

Bodovanie: správny výsledok „42 cm“ – 1b.; vysvetlenie – 4b.

p-mat

Organizátor korešpondenčného
seminára Pikomat