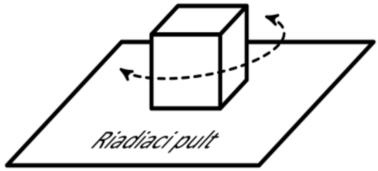
PIKOMAT

34. ročník www.pikomat.sk školský rok 2016/2017

Vzorové riešenia 2. série, kategória 5–7

Úloha M1: Gombík č. 1 – *Opravoval Slavomír „Slavo“ Hanzely*

Gombík mal tvar kocky a svojou spodnou stranou bol pripevnený o pult , avšak dalo sa ním otáčať doľava a doprava (ako na obrázku). Na každej stene gombíka bolo vyryté nejaké prirodzené číslo. Dian sa na gombík zahľadel tak, že videl súčasne práve tri jeho steny – a teda aj tri čísla, ktoré na nich boli napísané. Súčet týchto troch čísel bol 42. Potom Dian gombík otočil o 90 stupňov a z rovnakého miesta videl opäť tri steny s číslami. Ich súčet bol tentoraz 34. Po ďalšom otočení o 90 stupňov v tom istom smere videl tri čísla, ktoré mali súčet 53. **Aký by bol súčet čísel, ktoré by videl, ak by kocku otočil ešte raz o 90 stupňov (tým istým smerom ako dosiaľ)? A aký by bol *maximálny možný* súčet všetkých šiestich čísel na gombíku, pokiaľ by sa ukázalo, že na spodnej stene bolo napísané číslo 13?**



Označme si steny gombíka (a čísla na nich) ako na obrázku. Potom súčet čísiel na stenách A, B a V je 42. Keď gombík potočíme o 90°, uvidíme steny B, C a V. Súčet čísel na týchto stenách je 34. Až nakoniec uvidíme steny C, D a V. Súčet čísiel na týchto stenách je 53. Ak gombík potočíme znova o 90° uvidíme steny D, A a V. Ako by sme mohli zistiť ich súčet?

Všimnime si, že A sa nachádza len v súčte 42 a D v súčte 53. Ak tieto dva súčty sčítame, tak raz zarátame čísla A, B, C, D a dvakrát číslo V a to je rovné 95. My však chceme vedieť iba súčet čísiel A, D a V. Potrebujeme sa zbaviť čísiel B, C a jedného V. Avšak mi súčet čísel B, C a V poznáme. Ten je 34. Ak teda od 95 odrátame 34, ostane nám len súčet čísel A, D a V a ten je 95-34=61.

Teraz chceme zistiť, aký najväčší môže byť súčet na gombíku, ak na spodku je číslo 13. Zistíme súčet 5 vrchných stien a potom na konci pripočítame spodnú stenu (na nej je číslo 13). Chceme teda zistiť, aký môže byť súčet A, B, C, D a V.

Po troche skúšania zistíme, že ten súčet sa nám asi to nepodarí dostať presne. Vieme ho dostať skoro? Vieme, už vyššie sme zistili, že súčet A+B+C+D+2V=95. Keď odoberieme jedno V, dostaneme súčet hľadaných stien. Aby nám ostal čo najväčší súčet, musí byť V čo najmenšie. Najmenšie možné V je 1, preto súčet všetkých stien (aj spodnej) je nanajvýš 95-V+13=95-1+13=107.

Bodovanie:

správna odpoveď na 1. otázku zo zadania – 0,5b.; vysvetlenie tohto výsledku – 2b.; správna odpoveď na 2. otázku zo zadania – 1b.; vysvetlenie tohto výsledku – 1,5b.; čiastočné body som udeľoval za postupy a pozorovania, ktoré vedú k riešeniu; za numerické chyby som body nestrhával (ak bol dobrý postup).

Úloha M2: Voda – *Opravovala Monika Machalová*

V rade vedľa seba stálo na polici päť fliaš. Rudy, Dian ani Jazmína netušili, čo sa v nich nachádza, ale vedľa fliaš našťastie ležal papier s nasledujúcimi tvrdeniami:

1. Týchto päť fliaš obsahuje päť kvapalín: findžús, peroxirup, hričaj, bulieko a vodu. V žiadnych dvoch fľašiach nie je rovnaká kvapalina.
2. Na krajoch nie sú súčasne peroxirup a bulieko.
3. Nie je pravda, že hričaj nie je vľavo od vody.
4. Bulieko nie je bezprostredne vedľa peroxirupu.
5. Voda je rovnako vzdialená od peroxirupu ako od bulieka.
6. Findžús nie je vpravo od peroxirupu.

Z ktorej fľaše sa mali napiť, ak sa chceli napiť vody?

Máme 5 rôznych tekutín, každú v inej fľaši. Podmienka 5 mi hovorí, že voda je rovnako vzdialená od peroxirupu (P) a bulieka (B). Aby mohla byť od nich rovnako vzdialená, musí byť v strede medzi nimi, inak by bola k jednému z nich bližšie. To znamená, že nemôže byť na žiadnom kraji, lebo by nemohla byť medzi nimi.

Voda by mohla byť úplne v strede fliaš a B a P budú na krajoch, ako B_V_P alebo P_V_B, ale to nespĺňa podmienku 2, teda že na krajoch nie sú súčasne B a P. Môže byť preto len rovno medzi nimi, ako BVP alebo PVB. Budú teda niekde spolu ako takáto trojica nápojov bezprostredne vedľa seba, ešte však nevieme, kde táto trojica bude.

Nie je pravda, že hričaj nie je vľavo od vody, to sa dá prepísať ako je pravda, že hričaj (H) je vľavo od vody.   Voda preto nemôže byť na druhom mieste, lebo naľavo od trojice BVP/PVB musí byť H. Podmienka 6 zase znamená, že findžús (F) je vľavo od P. Musí byť teda vľavo od celej tejto trojice.

Trojica takto musí byť až na posledných troch miestach, lebo naľavo do nej musia byť aj H aj F. Voda musí byť v strede tejto trojice, takže musí **byť v 4. fľaške zľava**. Umiestnenie ostatných nápojov nevieme jednoznačne určiť, ale voda je vždy na tom istom mieste. **Deti sa teda musia napiť zo štvrtej fľašky zľava.**

Bodovanie: správny výsledok – 1b.; vysvetlenie, prečo trojica B-V-P sú bezprostredne vedľa seba – 2b.; vysvetlenie, že voda je štvrtá - 1,5b.; viac riešení s rovnakou odpoveďou – 0,5b.

Úloha M3: Majitelia mačsov – *Opravoval Matej Moško*

Po cestičke pred nimi sa pohybovali v rade za sebou traja obyvatelia planéty. Každý z nich mal baretku inej farby: prvý červenú, druhý modrú a tretí žltú. Všetci traja za sebou viedli svoju mačsovu. Ako tak obyvatelia planéty išli, rozprávali sa a často menili svoje poradie v rade, avšak tak, že majiteľ mačsovy išiel v rade vždy pred svojou mačsovou (mohli teda napríklad ísť v poradí: obyvateľ, obyvateľ, obyvateľ, mačsova, mačsova, mačsova). **Koľkými spôsobmi mohli byť obyvatelia a ich mačsovy zoradení tak, že každý majiteľ mal svoju mačsovu niekde za sebou?** Poznámka: Obyvatelia išli stále rovnakým smerom.

Na túto úlohu sa môžeme pozrieť viacerými spôsobmi. Prvé, čo si ale vo všetkých prípadoch musíme uvedomiť je, že každý obyvateľ má svoju *vlastnú* mačsovu. Takže rozhodne aj mačsovy budú rozhodovať o celkovom počte možností.

Ďalej určite vieme, že **prvý** bude **obyvateľ** (keby bola prvá mačsova tak by nebola splnená podmienka zo zadania, že pánova mačsova je vždy sa ním) a **posledná** bude **mačsova** (z rovnakého dôvodu).

Teraz si ukážeme prvý pohľad: Povedzme si, že na prvom mieste bude nejaký obyvateľ napr. modrý. Mnoho riešiteľov si zvolilo túto náročnú cestu a postupne vypísali všetkých 30 možností, kde na prvom mieste je obyvateľ (u nás napr. ten modrý) a kde sú splnené podmienky. Potom môžeme povedať, že pre rovnakých 30 možností môžem len za modrú vymeniť žltú alebo červenú.

Z toho ale potom máme 30+30+30=30 x 3 = 90 možností. A áno aj takto môžeme nad úlohou rozmýšľať. Ale nájdime spôsob, kde by sme sa nemuseli namáhať písaním a kontrolovaním 30 možností.

Poďme teda na druhý spôsob: Obyvateľ-O; Mačsova-M.

Pozrime sa na to takto. Naisto napríklad nemôžme mať nejakú možnosť kde v poradí budeme mať, že MMMOOO, miesta počítam <u>zľava doprava</u>. Preto poďme si napísať všetky možnosti, keď hľadáme v akom poradí vôbec môžu mačsovy a obyvatelia byť.

1. OOOMMM Keď su prvé tri O tak je len jedna jasná možnosť.
2. OOMOMM
3. OOMMOM Keď su prvé dve O tak sú len tieto dve možnosti lebo O nemôže byť posledný.
4. OMOOMM
5. OMOMOM Keď prvé je iba jedno O tak sú iba tieto dve možnosti. Nemôžu totiž zároveň na druhom a treťom mieste byť M inač by niekoho mačsova bola pred svojím pánom. A ešte k tomu O nemôže byť posledný.

Máme 5 možných poradí obyvateľov a mačsov. Teraz nám už len stačí zistiť koľko možností z toho vyplýva. Ideme postúpne rozlúsknuť jeden oriešok za druhým.

1. OOOMMM- Obyvateľov medzi sebou môžem usporiadať 6 spôsobmi (CZM,CMZ,ZMC,ZCM,MZC,MCZ), pre tých, ktorý už poznajú faktoriál tak to môžeme zapísať takto 3! = 3 x 2 x 1 = 6. Ináč stačí obyčajné vypísanie týchto šiestich možností. Kedže mačsovy patria k svojím konkrétnym pánom, tak si môžeme povedať, že majú tiež svoje 3 farby. Tie majú rovnako 6 možnosti usporiadania medzi sebou ako obyvatelia. A teraz každému usporiadaniu obyvateľov možem priradiť práve 6 možných usporiadaní mačsov. A to mi robí 6+6+6+6+6+6 = 6x6 = 36 možností.

2. OOMOMM-Poďme postupne od prvého miesta po posledné, teda zľava doprava. Na prvé miesto môžem dať **3** obyvateľov. Na druhé miesto môžem dať len **2** obyvateľov (jeden z troch už stojí na prvom mieste). Na tretie miesto si vyberám z **2** mačsov (patriaca buď prvému alebo druhému obyvateľovi). Na štvrté miesto doplním len to **1** posledného obyvateľa. Na piate miesto môžem si vyberať z **2**

možných mačsov. A na šieste miesto doplním tú **1** poslednú mačsovu. Takže celkovo možností je: 3x2x2x1x2x1 = 24.

3. OOMMOM-Na prvé miesto vyberám z **3** obyvateľov, na druhé miesto vyberám z **2** obyvateľov. Na tretie miesto vyberám jednu z **2** mačsov čo patria prvým dvom obyvateľom. Na štvrté doplním **1,** tú druhú z týchto dvoch. Na piate miesto doplním **1** posledného obyvateľa a na šieste **1** mačsovu čo patrí jemu. Takže možností je celkovo: 3x2x2x1x1x1 = 12
4. OMOOMM-Na prvé miesto vyberám z **3** obyvateľov. Na druhé miesto musím doplniť **1** mačsovu, čo patrí prvému obyvateľovi. Na tretie miesto vyberám z **2** obyvateľov a na štvrté musím doplniť toho **1** zostávajúceho obyvateľa. Na piate miesto vyberám z **2** mačsov a na šieste **1** zostávajúcu mačsovu. Takže možností je celkovo: 3 x 1 x 2 x 1 x 2 x 1 = 12
5. OMOMOM- Na prvé miesto vyberám z **3** obyvateľov, na druhé musím dať **1** jeho mačsovu, na tretie miesto vyberám z **2** obyvateľov a na štvrté miesto dávam zas **1** jeho mačsovu. Na piate miesto **1** zostávajúci obyvateľ a na šieste miesto **1** zostávajúca mačsova. Takže možností je: 3 x 1 x 2 x 1 x 1 x 1 = 6

Keď to spočítam, tak mám všetky možnosti: 36+24+12+12+6=90 možností.

Bodovanie: Strhnutia bodov sú vysvetlené priamo v riešení

Úloha M4: Rozbité hrnčeky – *Opravovali sestry Šimkové*

Obchodník sa so škatuľónom hádal o škode, ktorú spôsobila jeho mačsova. Obchodník mal na polici vystavené šálky. Prvá tretina šálok zľava bola po 8 galaxároch, nasledujúca tretina šálok po 6,5 galaxároch a posledná tretina po 5 galaxároch. Mačsova vyskočila na ľavý okraj police pred prvú šálku a zhodila ju na zem. Potom postupovala ďalej a zhadzovala šálky v rade jednu za druhou. Kým ju obchodník stihol zastaviť, zhodila na zem 25 šálok, ktoré sa všetky rozbili. Keď to obchodník videl, najprv sa veľmi rozhneval a potom ľutoval, že mačsova nezačala zhadzovať šálky z druhého konca police, teda sprava doľava. Aj keby totiž rozbila rovnako veľa šálok, škoda by bola o 33 galaxárov nižšia. **Koľko šálok stálo pôvodne na polici?**

Zo zadania si môžeme všimnúť, že počet stredných pohárov zhodí pri rozbíjaní zľava aj sprava vždy rovnaký, teda aj škoda, ktorú rozbitím týchto stredných pohárov spôsobila je zľava aj sprava rovnaká. Keď mačsova rozbíja poháre zľava a zhodí nejaký počet najdrahších pohárov (a) a počet najlacnejších pohárov (b), pri rozbíjaní sprava zhodí počet najlacnejších pohárov (a) a počet najdrahších pohárov (b). Teda rozdiel škôd pri rozbíjaní zľava a sprava je zapríčinený iba najdrahšími a najlacnejšími pohármi. Rozdiel medzi cenami pohárov je 8-5=3 galaxáre. Teda za každý najlacnejši pohár, ktorý by rozbila, ak by išla sprava, „ušetrí“ 3 galaxáre, oproti tomu, keď išla zľava a rozbila najdrahší. Aby bol rozdiel škôd 33 galaxárov, musela rozbiť práve o 33:3=11 najlacnejších šálok menej, ako najdrahších.

Mačsova rozbila spolu 25 pohárov a ak by rozbila iba najdrahšie poháre, tak potom by nerozbila najlacnejších pohárov o 11 menej ako najdrahších. To znamená, že nemohla rozbiť iba najdrahšie poháre.

Ak by rozbila iba všetky najdrahšie poháre a nejaké stredné, tak najmenej musí byť najdrahších pohárov 11. Aby dokopy ale rozbila 25 pohárov, musela by rozbiť 14 pohárov zo stredne drahých a to sa nedá, keďže počet najdrahších, stredne drahých aj najlacnejších pohárov je rovnaký.

To znamená, že musela rozbiť všetky najdrahšie poháre, všetky stredné a ešte aj nejaké z najlacnejších. Ak rozbila 1 najlacnejší pohár, tak rozbila 1+11=12 drahých pohárov a tým pádom aj 12 stredných. 12+12+1=25, teda nám všetko sedí a táto možnosť je správna. Ešte musíme preveriť ostatné možnosti, teda ak rozbila 2 a viac najlacnejších pohárov, tak najdrahších by musela rozbiť 13 a viac, tým pádom aj 13 a viac stredných a to je viac ako 25 pohárov. Tieto možnosti preto môžeme vylúčiť.

Na poličke bolo spolu 12+12+12=36 pohárov.

Bodovanie:
Výsledok – 2b.; Rozdelenie na 3 prípady – 1b.; Rozdiel škôd a počet rozbitých šálok v jednotlivých prípadoch – 2b.

Úloha M5: Zhromaždenie – *Opravoval Martin „Panda“ Svetlík*

Na zhromaždení bolo 50 škatuľónov. Každí dvaja sa medzi sebou buď poznali alebo nepoznali. Dian sa na chvíľu zamyslel, či sú medzi nimi aspoň dvaja takí škatuľóni, ktorí poznajú rovnaký počet škatuľónov. **Boli tam *určite* aspoň dvaja škatuľóni, ktorí poznali rovnaký počet škatuľónov?** Nezabudni svoju odpoveď zdôvodniť. Poznámka: Známosti boli vzájomné. Teda ak napríklad Alica poznala Cyrila, tak aj Cyril poznal Alicu. Podobne ak napríklad Barbora nepoznala Dávida, tak ani Dávid nepoznal Barboru.

Máme úlohu, v ktorej máme zistiť (a ako vždy v Pikomate, aj zdôvodniť), či niečo platí alebo nie. V princípe sú dva smery, ktorými sa môžme vydať, keď to chceme dokázať. Jedna z ciest by bola ísť priamo dokazovať, že to platí vo všetkých možných prípadoch, napríklad začať vypisovať všetky možnosti, kto koho pozná a zistiť, že vo všetkých sú aspoň dvaja, čo majú rovnaký počet známych. Prípadne by sme po ceste narazili na možnosť, ktorá by to nespĺňala, a tak by sme zistili, že to teda neplatí vždy. Samozrejme, pri 50 škatuľónoch je tých možností brutálne veľa, takže to nejdeme robiť.

Vydajme sa druhou cestou – budeme sa snažiť nájsť (vymyslieť) jeden prípad, keď to platiť nebude – teda každý škatuľón bude poznať iný počet skatuľónov. Ak takýto prípad objavíme, dokážeme tým, že tam nemusia byť aspoň dvaja škatuľóni s rovnakým počtom známych. Ak dokážeme, že taká možnosť neexistuje, tak dokážeme, že tam byť určite museli.

Takže, chceme dostať stav, že každý na zhromaždení má iný počet známych. Keďže na zhromaždení je **50 škatuľónov, každý môže poznať od 0 do 49 iných škatuľónov**. To je 50 možností, každému dáme jedno číslo od 0 do 49 a toľkých iných pozná. To by šlo nie? LENŽE, **ak niekto pozná 49 škatuľónov, znamená to, že sa pozná so všetkými ostatnými, a teda aj všetsi ostatní poznajú jeho.** To znamená, že potom by neexistoval nikto s počtom známych 0. Takže nemôžu naraz existovať dvaja s počtami známych 0 a 49, a teda 50 možných počtov známych nevieme priradiť škatuľónom tak, aby mal každý iný počet známych – aspoň dvaja ho musia mať rovnaký. A to je odpoveď na našu otázku.

Ďalší spôsob, ako ste to mohli dokázať, je takýto:

Predstavte si, že by sme sa každého škatuľóna spýtali, koľkých ostatných pozná. Každý by nám povedal nejaké číslo, a my by sme tieto čísla zrátali. **Každá známosť by takto bola zarátaná dvakrát** – napr. to, že Janko sa pozná s Ferkom, by sa prejavilo aj v Jankovom aj vo Ferkovom počte. **To znamená, že celkový súčet, čo by sme narátali, by bol určite párny** – bol by to dvojnásobok počtu dvojíc, čo sa poznajú**.** Mohlo by sa stať, že by nám každý povedal iné číslo, teda že by sme všetky čísla od 0 do 49 počuli práve raz? **Keď zrátame všetky čísla od 0 po 49, ich súčet je 1225** – **to nie je párne, takže takáto situácia nemohla nastať.**

Ukázali sme si dva rôzne dôkazy, že nemôže nastať situácia, že by mal každý iný počet známych – teda určite platí, že aspoň dvaja majú rovnaký počet známych. Oba tieto spôsoby mali spoločné to, že sme sa najskôr chceli ukázať opak toho, čo sme mali zadané, zistili sme, že taká situácia nemôže nastať, a tým sme dokázali, že musí platiť to, čo bolo zadané. Tomuto spôsobu dokazovania sa hovorí dôkaz sporom.

Bodovanie:

Dôležité bolo ukázať, že naozaj neexistuje situácia, keď by mal každý iný počet známych. Tí, ktorí zabudli napísať posledný krok, že počty 0 a 49 nemôžu existovať súčasne, stratili bod. Kto to ukázal len pre nejaké situácie, dostal okolo 3 bodov, kto ukázal len jednu náhodnú situáciu (napr. Že dvaja sa poznajú a nikto iný sa s nikým nepozná), dostal max 1 bod - na základe jednej situácie, kde to platí, sa nedá určiť, či to platí vždy.