Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

34. ročník www.pikomat.sk školský rok 2016/2017

Vzorové riešenia 3. série, kategória 5–7

Úloha M1: Obľúbené jedlo – *Opravovala Ľudmila „Ľudka“ Šimková*

„Moje najobľúbenejšie jedlo je zuaf. Môže mať 4 rôzne farby: zelenú, červenú, modrú alebo fialovú. Svoju stravu považujem za vyváženú, ak počas jedného dňa zjem 3 porcie *rôznych* farieb. Raz sme však mali problém so zásobami. Mal som vtedy k dispozícii len 20 zelených, 30 červených, 40 modrých a 50 fialových porcií a kým som ich všetky nezjedol, nepodarilo sa mi zohnať ďalšie.“ **Koľko *najviac* dní mohol vtedy mať náčelník tri porcie rôznych farieb denne?**

Náčelník má 20 zelených (Z), 30 červených (Č), 40 modrých (M) a 50 fialových (F) porcií. Každý deň si chce dať 3 porcie tak, aby mali rôznu farbu. Skúsme sa s porciami najprv len tak trochu „pohrať“ a vytvoriť z nich čo najviac vyhovujúcich trojíc.

Farbami F a M vieme vytvoriť 40 farebných dvojíc (ostane 10 F). Do trojice k nim vieme pridať napríklad 30 Č a 10 Z (ostane 10 Z). Máme tak vyváženú stravu na 40 dní. Ostalo nám však až 20 nevyužitých porcií – 10 F a 10 Z. Nedali by sa nejako povymieňať, aby sme mohli vytvoriť ďalšiu trojicu?

Všimnime si, že Z sme nepoužili každý deň, dokonca až 30 dní máme kombináciu F-M-Č. Zoberme teda 5 dní s F-M-Č a zameňme Č za Z. Nestratíme tým žiaden zo 40 dní, iba teraz sa skladajú z 25× F-M-Č a 15× F-M-Z. No a na sklade nám týmto pádom zostáva 10 F, 5 Č a 5 Z, z ktorých vieme vytvoriť ďalších 5 trojíc. Takto máme vyváženú stravu 45 dní a zvýšilo nám 5 F. Nech sa však snažíme akokoľvek, teraz už nevieme vymieňaním vytvoriť ďalšiu farebnú kombináciu. Prečo sa nám to nedarí?

Najskôr zistime, na koľko dní by náčelníkovi porcie vystačili, ak by nemusel mať vyváženú stravu. Spolu má 20 + 30 + 40 + 50 = 140 porcií a každý deň zje tri. 140 : 3 = 46, zv. 2, čo znamená, že by vystačili na 46 dní a ešte by mu dve porcie zvýšili. Teraz berme ohľad aj na vyváženú stravu. Z každej farby tak môže za jeden deň zjesť iba jednu porciu. Tým pádom za 46 dní vie z 50 F porcií minúť iba 46, čo znamená, že mu určite 4 F porcie zvýšia. Avšak aby mu strava vydržala na 46 dní, môžu mu zvýšiť iba 2 porcie. Preto mu vyvážená strava nevystačí na 46 dní.

Iné vysvetlenie, prečo je 45 dní naozaj maximum, je nasledovné: Náčelník má len 4 rôzne farby a každý deň musí minúť 3 rôzne. Takže vieme povedať, že z trojice farieb M, Č a Z musí každý deň minúť aspoň 2 porcie. Dokopy má z týchto farieb 20 + 30 + 40 = 90 porcií, a preto mu vystačia na najviac 90 : 2 = 45 dní. Vyššie sme ukázali, že vieme porcie rozdeliť do trojíc tak, aby mu na 45 dní naozaj vydržali, a tiež sme ukázali, že na 46 dní mu celkom určite vystačiť nemôžu. Až teraz môžeme preto spokojne prehlásiť, že **náčelník mohol mať vyváženú stravu najviac 45 dní.**

Bodovanie:

rozdelenie porcií na 45 dní – 2b.; dôkaz, že 46 dní sa nedá – 3b.; ak ste popísali postup rozdeľovania porcií, ale neukázali ste, prečo iným postupom by sa nedalo získať viac trojíc, za takýto dôkaz ste dostali – 2b.; rozdelenie porcií na 40 dní – 0,5b.

Poznámka:

ak by sme mali ešte viac farieb rozdeliť do rôznofarebných skupín (napr. trojíc), šikovný je nasledujúci spôsob: Ak sú „kôpky“ rovnako veľké, míňame z nich rovnomerne. Ak sú rôzne veľké, ako v našej úlohe, míňame z nich tak, aby sa ich veľkosť postupne čo najviac vyrovnávala – teda z najväčšej berieme najčastejšie, z najmenšej najmenej často. Ak nám však nejaké porcie zvýšia (neminuli sme všetky), musíme ešte ukázať, že sa ich naozaj viac minúť nedalo.

Úloha M2: Preteky – *Opravoval Jakub „Kubo“ Poljovka*

Na zemi ležal rozvinutý pás s políčkami. Na políčkach boli postupne napísané čísla 1, 2, 3, 4, 5, ... Na začiatku sa postavili na prvých päť políčok mačsovy, na každé práve jedna. Potom začali preteky. Preteky mali niekoľko kôl. V každom kole každá mačsova buď skočila o päť políčok dopredu (napr. z políčka 28 na 33) alebo oddychovala, čiže neskákala. Každá mačsova musela raz oddychovať, ak v predošlom kole doskočila na políčko deliteľné bezo zvyšku tromi (napr. ak mačsova v treťom kole doskočila na políčko 18, v štvrtom kole musela odpočívať a v piatom kole zase skákala). V prvom kole skákali všetky mačsovy. **Ktorá mačsova ako prvá doskočila *za* políčko 600 (teda aspoň na políčko 601)?**

Skúsme sa najprv pozrieť, ako skáče jedna ľubovoľná mačsova. Všimnime si, že ak urobí 3 skoky, určite sa práve raz v týchto troch skokoch nachádzala na políčku deliteľnom číslom 3, a teda musela raz stáť. Tieto oddychovacie (deliteľné 3) políčka sa pre jednu mačsovu opakujú vždy po 15 políčkach = po troch skokoch. Všeobecne teda môžeme povedať, že **po štyroch kolách sa každá mačsova posunie o práve 15 políčok.**

Pozrime sa teraz na celkový pohyb mačsov. Ako sme si už ukázali, po štyroch kolách sa každá mačsova posunie o 15 políčok. Po štyroch kolách bude teda situácia úplne rovnaká ako na začiatku (všetky mačsovy sú na ťahu), akurát budú mačsovy posunuté o 15 políčok. Po ďalších štyroch kolách sa situácia znovu zopakuje, ale mačsovy budú posunuté o 30 políčok. A tak ďalej... Čiže zo začiatočnej pozície mačsov: 1-2-3-4-5 sa po štyroch kolách dostanú do pozície 16-17-18-19-20, po ďalších štyroch kolách sa dostanú do pozície 31-32-33-34-35, a tak ďalej...

Vieme teda povedať, že po 156 ($156 = 39 \cdot 4$) kolách sa mačsovy ocitnú v pozícií 586-587-588-589-590. Z tejto pozície budú skákať všetky naraz, do pozície: 591-592-593-594-595. Mačsovy na políčkach 591 a 594 budú oddychovať, čiže po ďalšom kole bude pozícia 591-597-598-594-600. Teraz budú oddychovať mačsovy na políčkach 597 a 600, čiže v ďalšom kole budú stáť mačsovy na políčkach: 596-597-**603**-599-600. **Za políčko 600 doskočila ako prvá mačsova, ktorá stála pôvodne na políčku číslo 3.**

Bodovanie:

myšlienka, že po štyroch kolách sa pozície opakujú – 2,5b.; určenie pozícií mačsov pred cieľom – 1,5b.; správny výsledok – 1b.

Úloha M3: Objav – *Opravovali Katarína „Katka“ Marčeková*
Karolína „Kaja“ Pisoňová

„Vieš čo, moja, práve som objavil dve úžasné čísla. Sú zaujímavé tým, že:

- prvé číslo sa končí cifrou 2,
- druhé číslo sa končí cifrou 3,
- ak vydelíme prvé číslo druhým číslom a škrtneme zvyšok, podiel sa končí cifrou 4,
- zvyšok po vydelení prvého čísla druhým číslom sa končí cifrou 5.

Zaujímavé, že?“ Mačsova len pokrútila hlavou, čo znamenalo, že s ním nesúhlasí a podľa nej to nie je možné. **Pomýlil sa Nybar pri rátaní alebo taký príklad vážne existuje? Nezabudni svoje tvrdenie poriadne zdôvodniť.** Poznámka: Ak napríklad vydelíme číslo 16 číslom 3, dostaneme podiel 5 a zvyšok 1.

Čísla, ktoré hľadáme, si označme $A2$, $B3$, $C4$, $D5$ (A, B, C, D môžu byť ľubovoľné čísla), aby sme zvýraznili ich poslednú číslicu. Zo zadania vieme, že platí $A2 : B3 = C4$, zvyšok $D5$. Túto rovnosť si môžeme zapísať aj takto (ako keby sme išli robiť skúšku správnosti delenia): $B3 \cdot C4 + D5 = A2$.

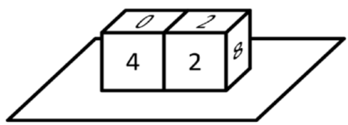
Poďme sa teraz pozrieť na to, čo sa deje, keď násobíme dve čísla. Načrtnuté tu vidíme násobenie dvoch čísel končiacich na cifry 3 a 4 (na konkrétnych číslach teraz nezáleží, sú zvolené náhodne, išlo iba o to, aby končili na 3 a 4). Pri násobení pod sebou si môžeme všimnúť, že cifra na mieste jednotiek vo výslednom súčine **závisí vždy len od posledných cifier činiteľov**. Vieme teda povedať, že **súčin čísel $B3$ a $C4$ sa bude celkom určite končiť cifrou 2**, pretože $3 \cdot 4 = 12$. Po pripočítaní $D5$ tak dostaneme číslo, ktoré sa určite končí sedmičkou (opäť nám stačí pozerať sa len na posledné cifry sčítancov). My sme však v našej rovnici napísanej vyššie očakávali výsledok $A2$, teda číslo končiace dvojkou. Je jasné, že tieto dve čísla sa nemôžu rovnať. Taký príklad teda neexistuje, **Nybar sa musel pomýliť.**

```
   5613
 ·  174
 ------
  22452
39291
5613
 ------
976662
```

Bodovanie:

rovnosť $B3 \cdot C4 + D5 = A2$ – 1b.; nájdenie a vysvetlenie poslednej cifry čísla ($B3 \cdot C4 + D5$) – 3,5b.; správna odpoveď – 0,5b.

Úloha M4: Kalendár – *Opravovali Svetlana „Svet“ Sučíková (7 a Sekunda)*
Katarína „Kat“ Sučíková (5, 6 a Príma)



Kalendár tvorili dve kocky. Na každej stene bola napísaná jedna z cifier nula až deväť. Dátum sa na kalendári nastavil tak, že sa zobrali dve kocky, nejako sa natočili a priložili sa k sebe jednou stenou. Kalendár sa potom čítal tak, že sa na kocky pozrelo zvrchu, takže boli vidieť len vrchné dve steny a zľava doprava sa prečítalo číslo tvorené ciframi na týchto stenách. Napríklad na obrázku je na kalendári číslo 02. **Dajú sa na kocky rozmiestniť cifry tak, aby sa dali ukázať všetky čísla 01–31? A čo v prípade, keď 9 a 6 píšeme s bodkou, aby sme ich od seba vedeli odlíšiť (a nemohli použiť „6“ raz ako 6 a raz ako 9)? Nezabudni obe odpovede zdôvodniť.** Poznámka: Čísla 1–9 na kalendári ukazujeme ako 01, 02, ..., 09.

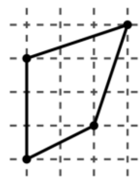
Jedna kocka má 6 stien, a teda máme spolu 12 stien, na ktoré budeme dosadzovať cifry 0–9. Ako prvé si všimneme, že niektoré dátumy majú obe cifry rovnaké, konkrétne 11 a 22. Takže cifry 1 a 2 budeme potrebovať na oboch kockách naraz. Ďalej treba zostaviť dátumy 01–09. Ak by sme umiestnili cifru 0 iba na jednu kocku, museli by sme všetky ostatné cifry (1–9) dať na tú druhú. Tam sa ale, pravdaže, deväť cifier nezmestí. Preto musíme cifru 0 dať taktiež na obe kocky (a cifry 1–9 nejako rozdeliť). Už po týchto jednoduchých úvahách vidíme, že je nutné cifry 0, 1 aj 2 dať na obe kocky. Tým pádom nám na každej kocke zostávajú už iba 3 voľné steny, teda spolu 6 stien. Ale ešte stále sme nedosadili až 7 cifier (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

Pokiaľ cifry 6 a 9 dokážeme od seba jasne odlíšiť (píšeme ich s bodkou), tak je jasné, že 7 rôznych cifier sa na zvyšných 6 voľných stien nezmestí, a teda úloha nemá riešenie – kalendár sa nedá zostaviť.

Avšak ak píšeme 6 a 9 bez bodky, tak stačí na niektorú kocku napísať iba cifru 6, no a otočením kocky ju vieme použiť aj ako cifru 9. Našťastie na kalendári nepotrebujeme žiadne z čísel 66, 69, 96, 99, pri ktorých by sme potrebovali cifru 6 napísanú na oboch kockách. Tým pádom nám stačí na 6 voľných stien doplniť už iba 6 cifier: 3, 4, 5, 6, 7 a 8. Už nám zostáva len skontrolovať, či to naozaj ide! Dosadíme cifry na steny kociek napríklad: Na jednu kocku 0, 1, 2, 3, 4, 5; na druhú kocku 0, 1, 2, 6, 7, 8; a teraz už ľahko skontrolujeme, že všetky čísla 01–31 sa dajú vytvoriť.

Bodovanie:
cifry 1 a 2 na oboch kockách – 1b.; cifra 0 na oboch kockách – 1b.; správna odpoveď, kedy sa kalendár DÁ zostaviť a ukázanie aspoň jedného rozmiestnenia cifier na kocky – 1b.; odskúšanie, že naozaj vieme poskladať všetky dátumy (alebo správny slovný dôkaz) – 1b.; správna odpoveď, kedy sa kalendár NEDÁ zostaviť a vysvetlenie, prečo to nejde – 1b.

Úloha M5: Mapa – *Opravoval Martin „Panda" Svetlík*

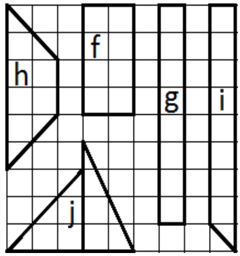


Nybar vytiahol z truhlice mapu a položil ju na stôl. Mapa bola nakreslená na štvorčekovej sieti. Jazmína si všimla, že všetky útvary zakreslené na mape majú tvar štvoruholníka a majú vrcholy v mrežových bodoch siete, napríklad ako na obrázku. Rudy Jazmíne pošepkal, že sa nudí a Jazmína mu poradila, nech vypočíta obsahy rôznych štvoruholníkov na mape. Po chvíľke ju Rudy poklopal po ramene a povedal jej, že našiel útvary s obsahom a) 8, b) 8,5, c) 8,25 štvorčekov. **Mohol Rudy nájsť všetky tieto útvary? Ak áno, nájdi pre každú možnosť *aspoň dva rôzne* príklady. Ak nie, nezabudni zdôvodniť, prečo takýto útvar nemohol nájsť.**

Táto úloha mala tri časti, a tak by sa patrilo odpovedať na všetky tri. Otázka *c)* bola najťažšia (preto sú body za ne rozdelené tak, ako sú), no aj keď ste vyriešili tú najťažšiu, stále bolo treba odpovedať aj na *a)* a *b)*, aby ste dostali body aj za tie. Takže poďme postupne.

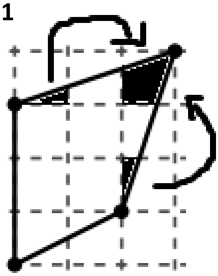
a) Obsah 8 je ľahký – väčšinou ste našli obdĺžnik 4×2 (útvar f – Obr. 1) a 8×1 (útvar g – Obr. 1), ale dá sa nájsť aj niečo nepravidelnejšie, napr. útvar h (Obr. 1), ktorý má 6 celých štvorčekov a 4 polštvorčeky.

b) Obsah 8,5 – Prvý nápad je zobrať obdĺžnik 8×1 a predĺžiť ho na konci o trojuholníček (útvar *i* – Obr. 1). Ďalší dobrý nápad, ako získať obsah 8,5, je zobrať si nejaké dva trojuholníky, ktorých súčet obsahov je 8,5 a zlepiť ich spolu jednou stranou, napríklad ako útvar *j* (Obr. 1), ktorý vznikol z trojuholníkov s obsahmi 4 a 4,5.

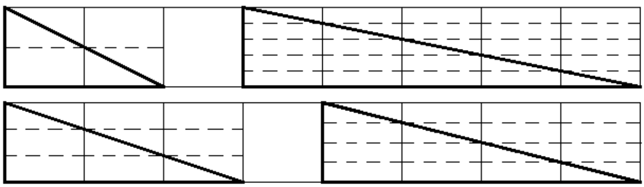


Obr. 1

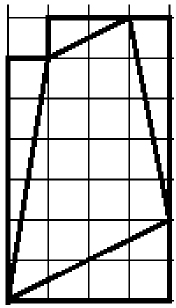
c) Obsah 8,25? Nech skúšame ako skúšame, nijakovsky nám to nejde. Tak skúsime dokázať, že sa to nedá. Niektorí ste napísali, že nikde nevieme vyseknúť inú časť zo štvorčeka ako polovicu. To nie je celkom pravda. Napríklad v útvare v zadaní sú tie časti v jednotlivých štvorčekoch rôzne, akurát že po poskladaní tvoria celé štvorčeky (alebo polštvorčeky) – Obr. 2.


Obr. 2

Pozrime sa na chvíľu na trojuholníky. Dajme tomu, že obdĺžniky 2×1, 3×1, 4×1, 5×1 rozsekneme na polovicu. Jednak vidíme to, čo som napísal vyššie, že tie dieliky do seba pasujú a dajú sa poskladať na celé štvorčeky, a vidíme aj, že **trojuholník má obsah ako polovica obdĺžnika**. Takže buď to bude celé číslo (ak má obdĺžnik párny obsah), alebo niečo-a-pol (ak má obdĺžnik nepárny obsah). Aj keď v jednotlivých štvorčekoch môžu byť rôzne veľké časti (Obr. 3).


Obr. 3

No a nech už hľadaný štvoruholník vyzerá akokoľvek, vieme ho z každej strany doplniť trojuholníkom tak, aby sme dostali útvar, čo má len celé štvorčeky (Obr. 4). No a teda obsah tohto štvoruholníka je *„počet celých štvorčekov mínus obsahy trojuholníkov“*. A keď od celého čísla odčítavame celé čísla alebo čísla *„niečo a pol“*, určite dostaneme znova len celé číslo, alebo *„niečo a pol“* – nikdy nie *„niečo,25“*. Hotovo. Dokázané, že 8,25 nemôže byť.


Obr. 4

Bodovanie:
dva príklady s obsahom 8 – 1b.; dva príklady s obsahom 8,5 – 1,5b.; tvrdenie, že 8,25 sa nedá – 0,5b.; dôkaz, že sa to naozaj nedá – 2b.