Vzorové riešenia 1. série, kategória 5–7

Úloha M1: Heslo – *Opravoval Dávid „Puding“ Mišiak*

„Heslo?“ spýtala sa Betka. „Ale veď my heslo nepoznáme.“ „To nevadí,“ povedala Linda a dala Betke tieto indície: Heslo je *najväčšie* päťciferné číslo *ABCDE*, ktoré je deliteľné deviatimi a zložené z *rôznych* cifier takých, že:

- súčet cifier *B* a *D* je 14,
- cifra *A* je párna,
- cifra *C* je zo všetkých piatich cifier najväčšia.

Aké bolo heslo? Nezabudni svoju odpoveď zdôvodniť.

Ako prvú si môžeme všimnúť podmienku, ktorá hovorí, že B+D = 14. Tá nám nedáva veľa možností, ktoré cifry to môžu byť. Konkrétne sú to tieto tri možnosti: 9 a 5, 8 a 6, 7 a 7. Keďže hľadáme najväčšie číslo vyhovujúce zadaniu, B bude vždy väčšie číslo z dvojice (na mieste tisícok tak bude väčšia cifra). Poslednú možnosť môžeme vylúčiť, lebo zadanie hovorí, že všetky cifry majú byť rôzne. Keby B a D boli 9 a 5, už by sme nemali ako zvoliť cifru C, pretože tá má byť najväčšia, my by sme však už mali obsadenú deviatku, a žiadna cifra nie je väčšia ako 9. Takže s istotou vieme povedať, že cifra **B musí byť 8 a D musí byť 6**. Potom je tiež jasné, že cifra **C musí byť 9**, aby bola zo všetkých najväčšia.

Už nám stačí zistiť iba aké môžu byť A a E. Keďže A má byť párna cifra, ostali nám na výber už iba 4 a 2. Snažíme sa pritom vyrobiť čo najväčšie číslo, **skúsime teda za A doplniť 4.** Ak sa nám podarí nájsť takú cifru E, že číslo 4896E bude spĺňať podmienky, máme vyhrané.

Všetky podmienky sú pritom už splnené, stačí zaistiť, že bude číslo deliteľné deviatimi. Na výber pre cifru E pritom máme cifry 0, 1, 2, 3, 5 a 7 (aby boli všetky cifry rôzne). Skúsime teda doplniť najväčšiu z nich a zistíme, že 48967 delené deväť je 5440, zvyšok 7. Aby sme dostali zvyšok 0 (vtedy číslo bude deliteľné deviatimi), potrebujeme, aby naše číslo bolo práve o tých 7 menšie – takže za E doplníme 0. Dostaneme tak číslo **48960**, o ktorom vieme, že je najväčším číslom spĺňajúcim všetky podmienky zadania. Hurá, našli sme správne heslo.

Bodovanie:

2,5 bodu za správne určenie cifier B, C a D aj s odôvodnením. 1 bod za určenie cifry A. 1,5 bodu za určenie cifry E (teda dodržanie deliteľnosti deviatkou). Ak niektorá podmienka nebola splnená, body som dával za časti postupu.

Úloha M2: Pustiť či nepustiť? – *Opravovala Ľudmila „Ľudka" Šimková*

„Cifry 1 až 9 (každú práve raz) napíš za sebou v nejakom poradí. Vezmi všetky trojice po sebe idúcich cifier (takých je sedem). Každá trojica tvorí trojciferné číslo. Týchto sedem trojciferných čísel sčítaj. **Aký najväčší súčet môžeš dostať? Prečo nemôžeš dostať väčší?**"

Viacerí ste si skúsili napísať cifry v poradí 123456789 a vyšiel vám súčet 3192. Potom ste poradie obrátili na 987654321 a vyšiel súčet 4578. Tu ste si všimli, že chceme, aby vznikli čo najväčšie trojciferné čísla - sčítance. Na to, aby boli sčítance čo najväčšie, musia mať na mieste stoviek čo najväčšie cifry. Keďže sa cifry nemôžu v pôvodnom čísle opakovať, každá môže byť na mieste stoviek najviac jedenkrát. Sčítance, ktoré dostaneme z čísla 987654321, začínajú na cifry 9 až 3, čo je 7 najvyšších cifier. Splnili sme to, že sčítance začínajú na čo najväčšie cifry. Stačí nám to na to, aby sme dostali najväčší súčet?

Skúsme posunúť cifru 9 o jedno miesto doprava. Vznikne číslo 897654321 pre ktoré máme súčet 4588, čo je viac, ako sme mali predtým. Keď ju posunieme ešte o jedno miesto doprava dostaneme ešte väčší súčet. Bude za tým teda ešte niečo viac.

Pozrime sa na to, koľkokrát sa v sčítancoch nachádza cifra. Všimneme si, že sa nachádza buď v jednom, v dvoch alebo v troch sčítancoch, podľa toho, na akej pozícii je v pôvodnom čísle. V nasledujúcej tabuľke si pre každú pozíciu rozpíšeme, na akých miestach v sčítancoch sa cifra, ktorá je na tejto pozícii, nachádza.

Pozícia	na mieste (100 = stoviek, 10 = desiatok, 1 = jednotiek)		
1.	100		
2.	100	10	
3.	100	10	1
4.	100	10	1
5.	100	10	1
6.	100	10	1
7.	100	10	1
8.		10	1
9.			1

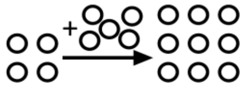
Cifry na 3. až 7. pozícií sa nachádzajú v súčte trikrát. Raz na mieste stoviek, raz na mieste desiatok a raz na mieste jednotiek. V súčte ich zarátame až 111-krát. Cifra na druhej pozícií sa nachádza na mieste stoviek a desiatok. V Súčte ju zarátame 110-krát. Cifru na 1. pozícii zarátame 100-krát, na 8. pozícii 11-krát a na poslednej 9. pozícii len 1-krát. Súčet bude najväčší vtedy, keď čo najviac krát zarátame väčšie cifry. Na 3. až 7. pozíciu predo dáme 5 najväčších cifier (9 až 5) v ľubovoľnom poradí. Cifru 4 dáme na 2. pozíciu, cifru 3 na 1. pozíciu, cifru 2 na 8. pozíciu a cifru 1 na poslednú 9. pozíciu. I keď cifru 3 zarátame len v jednom sčítanci ako 300 a cifru 2 v dvoch sčítancoch ako 20+2 dostaneme väčší súčet, ako keby sme tieto dve cifry vymenili. Nezáleží teda len na tom, koľkokrát sa cifra v sčítancoch vyskytne, ale i na akých miestach.

Súčet teda je $\mathbf{(9+8+7+6+5)\cdot 111+4\cdot 110+3\cdot 100+2\cdot 11+1\cdot 1=4648.}$

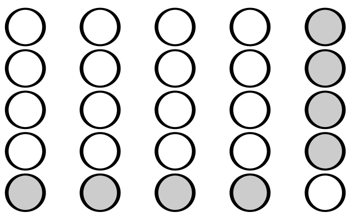
Bodovanie:
3b za správny výsledok + 1b za zdôvodnenie stredných pozícií 3 až 7 + 1b za zdôvodnenie krajných pozícií 1, 2, 3 a 4. Ak ste nemali správny výsledok, mohli ste dostať najviac 3b za vysvetlenie stredných pozícií a 2b za vysvetlenie krajných pozícií.

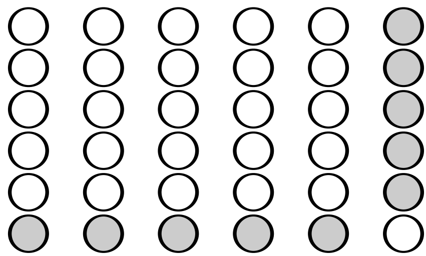
Úloha M3: Mince – *Opravovala Monika Machalová*

Dedko mal na stole kôpku rovnakých mincí. Ukladal si ich do štvorca. Najprv zobral 4 mince, a uložil ich do štvorca 2 × 2. Potom k nim pridal ďalších 5 mincí, aby mu vznikol štvorec 3 × 3 (viď obrázok). Takto pokračoval a robil z mincí stále väčší a väčší štvorec. Keď poskladal najväčší štvorec, ako sa dalo, ostalo mu 19 mincí. Na to, aby postavil ešte väčší štvorec, mu chýbalo 12 mincí. **Koľko mal dedko mincí? Aké boli rozmery najväčšieho štvorca, ktorý sa mu podarilo poskladať?**



Dedkovi zostalo 19 mincí a chýba mu ešte 12 do ďalšieho štvorca. Rozdiel medzi jeho štvorcom a tým väčším je teda **19 + 12 = 31 mincí**. Ako sa dá zväčšiť štvorec? Pridáme jeden riadok zdola, jeden riadok sprava a ešte jednu mincu do rohu medzi tieto dva riadky.





Teraz chceme, aby bol rozdiel medzi dvomi štvorcami 31. Jedna minca v rohu bude tá 31., takže bez nej tam bude len 30 mincí. To sú tie dva riadky, dolný a pravý. Jeden riadok bude mať preto dĺžku 30/2 = 15. Najväčší štvorec, čo dedko vedel postaviť, má preto **rozmery 15x15**.

A koľko mal dedko mincí? Štvorec 15x15 obsahuje 225 mincí. Dedkovi ešte ostalo 19 navyše, a tak má **225 + 19 = 244 mincí**.

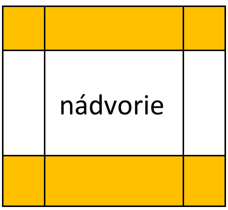
Bodovanie:
1 bod za zistenie rozdielu medzi štvorcami, 2 body za zistenie veľkosti štvorca, 1 bod za počet mincí, 1 bod za odpoveď

Úloha M4: Útok! – *Opravovala Katarína „Katka“ Sučíková*

Pevnosť bránila statočná posádka. Na začiatku tvorilo posádku 40 mužov. Kapitán pôvodne rozostavil svoje sily ako na obrázku, takže každú stranu pevnosti bránilo 11 mužov. Pri prvom útoku stratila posádka pevnosti 4 mužov. No kapitán tých zvyšných rozostavil tak, že znova bránilo každú stranu 11 mužov. Takto sa to zopakovalo ešte niekoľko útokov: pri každom posádka stratila 4 mužov, no kapitán po každom útoku dokázal zmeniť rozostavenie tak, že každú stranu bránilo 11 mužov. Pri poslednom útoku už stratila posádka len 2 mužov a kapitán znova dokázal rozostaviť zvyšných vojakov tak, aby každú stranu bránilo 11 mužov. Potom to útočníci vzdali. Bolo to šťastie, lebo keby spravili ešte jeden útok, tak už by kapitán mužov nevedel rozostaviť tak, aby každú stranu pevnosti bránilo 11 mužov. **Koľko najviac útokov mohlo prebehnúť? Ako kapitán menil rozostavenie po jednotlivých útokoch?** Poznámka: Všetci obrancovia boli vždy na hradbách, nikdy na nádvorí.

1	9	1
9	Nádvorie	9
1	9	1

Začnime tým, že si položíme otázku:
Aký je minimálny počet obrancov v posádke taký, že sa vedia rozostaviť tak, aby pevnosť ubránili?
Je to 22 obrancov. Lebo máme 4 steny a teda dve z nich musia byť určite nezávislé jedna od druhej, nemajú spoločných obrancov, no zároveň oboje musia mať 11 obrancov na stráži.



S istotou vieme povedať, že s menej obrancami to nepôjde.
Teraz skúsme nájsť systém ako by sme vedeli zistiť počet útokov a rozostavenia obrancov. Pomôže nám fakt, že ak obranca stojí na rohu pevnosti tak vie naraz brániť na dvoch stenách, ktoré majú spoločný roh na ktorom ten obranca stojí. Takže premiestnením obrancu zo stredného políčka steny na jej rohové políčko, zachováme počet obrancov na danej stene, ale zvýšime počet obrancov o 1 na stene ktorá zdieľa to isté rohové políčko. Keď potom z tejto steny odoberieme jedného zo stredného políčka, tak budeme mať na oboch stenách znovu počiatočný počet obrancov. Takýmto systémom vieme odobrať obrancu z každej steny, teda odoberieme 4 obrancov ale počet obrancov na každej stene zostane nezmenený. Odoberanie obrancov znamená, že boli zabití pri útoku.

Poznámka: Odobraním obrancu zo stredného políčka steny zmeníme počet obrancov na tej stene ale nezasiahneme do počtu vojakov na zvyšných 3 stenách.

Ak pracujeme s týmto systémom, tak rozostavenia pred útokom by boli nasledovné (avšak je viacero možností rozostavenia a všetky správne sa rátajú ☺):

1	9	1
9		9
1	9	1

1. Rozostavenie 40 obrancov

2	7	2
7		7
2	7	2

2. Rozostavenie 36 obrancov

3	5	3
5		5
3	5	3

3. Rozostavenie 32 obrancov

4	3	4
3		3
4	3	4

4. Rozostavenie 28 obrancov

5	1	5
1		1
5	1	5

5. Rozostavenie 24 obrancov

Vidíme, že po 4 útokoch máme 24 obrancov. Ak by bolo viac ako 5 útokov tak v 5. útoku by sme stratili 4 vojakov a museli by sme rozostaviť 24-4=20 vojakov pred 6. útokom. My však potrebujeme minimálne 22 vojakov na obranné rozostavenie. Preto viac ako 5 útokov byť nemôže. Vieme, že po poslednom útoku kapitán stratil len 2 obrancova teda ak bolo 5 útokov tak po piatom útoku by zostalo 24-2=22 obrancov. To je minimálny potrebný počet na ubránenie pevnosti. Vieme rozostaviť 22 vojakov do obranného postavenia? Áno, dá sa to:

5	0	6
0		0
6	0	5

6. rozmiestnenie – 22 obrancov

Teda správne je, že prebehlo 5 útokov a kapitán mohol použiť vyššie uvedený systém na rozostavovanie vojakov.

Bodovanie:

Správny maximálny počet útokov za predpokladu, že riešiteľ ukázal postup ako sa k výsledku dostal - 2b; Správne vysvetlenie prečo nebolo viac útokov - 1b; Ukázanie a/alebo skúmanie rozostavení obrancov po jednotlivých útokoch - 2b

Úloha M5: Problém – *Opravoval Martin „Panda“ Svetlík*

Melánia mala veľmi rada čísla, ale bohužiaľ vedela počítať len do 25. Takisto mala rada štvorce, a preto si čísla od 1 do 25 usporiadala do piatich riadkov a piatich stĺpcov ako na obrázku. Potom prišla za ocinom so slovami: „Aha oci, v každom riadku, stĺpci aj uhlopriečke je súčet čísel 65.“ Ocko sa pozrel a odpovedal jej: „Melánka, súčet nie je všade 65, ako vravíš.“ Nakoľko však videl Melánke smútok v očiach, tak rýchlo dodal: „Avšak keď vymeníš (premiestniš) navzájom 4 čísla, tak bude súčet 65 naozaj v každom riadku, stĺpci aj na uhlopriečkach. Ale ja už musím ísť, zase na nás útočia, takže ti s tým už nemôžem pomôcť.“ **Ako mala Melánka tieto 4 čísla premiestniť? Nájdi všetky riešenia.**

6	5	23	16	14
21	19	12	11	3
15	8	1	24	17
4	22	20	13	7
18	10	9	2	25

V tejto úlohe máme hneď od začiatku všetko, čo potrebujeme – máme skoro dobre vyplnenú tabuľku, a vieme, že chceme premiestniť práve 4 čísla, aby sme dostali všade súčty presne 65. **Tak sa pozrime, koľko sú tie súčty teraz:** Vidíme, že 4 stĺpce sú zlé – dva sú menšie o 1, dva sú väčšie o 1. Keďže musíme premiestniť práve 4 čísla, bude to musieť byť jedno z každého z týchto 4 stĺpcov, aby sme každý z nich opravili. Napríklad, keď by sme vymenili 15 za 16, tak tie dva stĺpce by sa opravili. Akurát že ešte tu máme aj riadky – v nich spravíme podobnú úvahu – tiež v každom zo 4 chybných riadkov musíme zmeniť jedno číslo.

Nájdeme si čísla, ktorých aj riadok aj stĺpec je 64, a takisto si nájdeme čísla, ktorých aj riadok aj stĺpec je 66. To sú tie čísla, ktoré chceme meniť - ich zmenou opravíme riadok aj stĺpec zároveň. Tak ktoré z nich? Napríklad, na to aby sme mohli vymeniť 18-tku, potrebovali by sme na jej miesto dať 19-tku. 19-tku ale nemáme v zozname čísel, čo chceme meniť (nie je vyznačená hrubým). Zato **keď vymeníme 10 za 11**, tak tým vyriešime 2. aj 5. riadok, a 2. aj 4. stĺpec. A dokonca aj jednu uhlopriečku.

A keď **vymeníme 6 za 7**, tak tým vyriešime ten zvyšok, a jasáme ☺. Žiadna iná zmena by nám nepomohla, keďže toto sú jediné dvojice vyznačených čísel, ktoré majú rozdiel 1. Takže, tabuľka vyzerá po zmene takto a všetko sedí.

	6	5	23	16	14	**64**
	21	19	12	11	3	**66**
	15	8	1	24	17	65
	4	22	20	13	7	**66**
	18	10	9	2	25	**64**
66	**64**	**64**	65	**66**	**66**	64

	6	**5**	23	16	14	64
	21	19	12	**11**	**3**	66
	15	8	1	24	17	65
	4	22	20	**13**	**7**	66
	18	**10**	9	2	25	64
66	64	64	65	66	66	64

	7	5	23	16	14	65
	21	19	12	10	3	65
	15	8	1	24	17	65
	4	22	20	13	6	65
	18	11	9	2	25	65
65	65	65	65	65	65	65

Bodovanie:

2,5 boda za správne vyplnenú tabuľku, alebo jasne povedané, ktoré treba vymeniť. 1 bod za ukážku súčtov na začiatku. 1,5 boda za komentár, prečo treba vymeniť práve tie čísla.