Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

36. ročník www.pikomat.sk školský rok 2018/2019

Vzorové riešenia 1. série, kategória 5–7

Úloha M1: Písmenká – *Opravovali Jakub „Kubo“ Pravda a Hana „Hanka“ Kluvancová*

Pozerali sa na takéto príklady:

NA + TR = LI
CE + GR = TR
OI + GR = GEO

Vymeňte písmenká za cifry (rovnaké písmenká za rovnaké cifry, rôzne za rôzne) tak, aby všetky príklady sedeli.

Hneď na začiatku si môžeme všimnúť, že výsledok v druhom príklade má na mieste jednotiek rovnakú číslicu ako jeden z jeho sčítancov - R. Toto môže nastať iba vtedy, keď má druhý sčítanec na mieste jednotiek nulu, takže **E=0**.

Pozrime sa teraz na tretí príklad. Máme tu súčet dvoch dvojicferných čísel, ktorých výsledok je trojciferný. Dve dvojciferné čísla nám nikdy nedajú súčet väčší ako 198 (99+99), takže môžeme usúdiť, že G=1, lebo viac ako jedna byť nemôže. Druhý sčítanec (GR) tak bude v rozmedzí od 10 po 19 a aby nám dal s prvým (OI) súčet nad 100 (GEO), musí byť O buď 8, alebo 9. Ak by sa O=8, tak výsledok by bol 108. No to by vyšlo iba ako 89+19=108 a keďže rôznym písmenám musíme priradiť rôzne hodnoty, tak prípad O=8 môžeme vylúčiť. Rovnali by sa totiž I a R. Takže **O=9**.

V druhom príklade to zatiaľ bude vyzerať takto: C0 + 1R = TR. 1R pritom môže byť zo zostávajúcich číslic najviac 18, a preto môžeme povedať, že **C a T sú dve po sebe idúce číslice**.

Pozrime sa opäť na tretí príklad. Keďže O=9, to znamená, že **I+R=9** (E=0, takže neprekročíme desiatku). Kombinácie I a R zo zostávajúcich číslic teda môžu vyzerať takto:

1. I=2 a R=7; Dosadíme si to do prvej rovnice. Vtedy by sme museli dosadiť za A=5. Zostali by nám číslice 3, 4, 6, 8 a písmená L, T, C, N. Vidíme, že žiadna dvojica z týchto číslic nie sú dve po sebe idúce čísla, takže táto možnosť **nevyhovuje**, nemáme ako spraviť C a T.

2. I=7 a R=2; Toto bude to isté ako prípad 1., pretože za A by sme takisto dosadili 5. **Nevyhovuje**.

3. I=4 a R=5; Tu by sme za A museli dosadiť 9, no tú už sme priradili písmenu O. Takže ani **táto možnosť nie je správna**.

4. I=5 a R=4; A by sa muselo rovnať 1, ale už sa G=1. **Nevyhovuje**.

5. I=6 a R=3; Takto by sme potrebovali dosadiť za A=3, no 3 sme priradili R. **Nevyhovuje**.

6. I=3 a R=6 ; Teraz dosadíme za **A=7**. Ostanú nám číslice 2, 4, 5, 8 a písmená L, T, C, N. Vieme, že LI>TR aj LI>NA, a TR>CE, takže za L si dosadíme najvyššiu zostávajúcu číslicu, to jest **L=8**. Ako sme už predtým zistili, C a T sú dve po sebe idúce čísla, pričom C je to menšie, takže **C=4** a **T=5**, čo nám nechá 2 pre písmeno N, **N=2. Táto možnosť je jediná vyhovujúca**.

Príklady by potom vyzerali takto:

27 + 56 = 83
40 + 16 = 56
93 + 16 = 109

Bodovanie:
za správny výsledok – 2b.; za zistenie, že E=0 – 0,5b.; za zistenie, že G=1 – 0,5b.; za zistenie, že O=9 aj s vysvetlením – 0,5b.; za vypísanie možností pre I a R 0,5b.; za zistenie hodnôt I a R a kompletný postup – 1b.

Úloha M2: Dôkaz hodnosti – *Opravovali Juraj Jankovich a Fedor Župník*

„Myslím si tri celé čísla. Keď sčítam prvé a druhé, dostanem nepárne číslo. Keď sčítam druhé a tretie, tiež dostanem nepárne číslo. A aj keď sčítam tretie a prvé, dostanem nepárne číslo.“ **Môžu byť také tri celé čísla, pre ktoré to platí? Ak nie, prečo? Ak áno, ktoré?**

Najprv sa pozrime na tri čísla, ktorých súčty sú vždy nepárne. Aké čísla môžeme sčítavať? Buď párne a párne, tie nám však dajú párny súčet. Druhá možnosť sú dve nepárne čísla, tie nám však tiež dajú párny súčet. Treťou možnosťou je sčítať jedno párne a jedno nepárne číslo, pričom výsledok bude nepárny.

Nemôžeme teda myslieť trojice čísel rovnakej parity, či už tri párne alebo tri nepárne, lebo každý súčet dvoch z nich bude párny. Máme teda určite jedno číslo párne a jedno nepárne a potrebujeme ešte jedno číslo, ktoré keď zrátame s najprv jedným a potom s druhým z čísel, čo už máme, dostaneme nepárny súčet. Dá sa to teda?

Ak by naše tretie číslo bolo párne, tak síce dostaneme nepárny súčet s nepárnym číslom, no s párnym by sme, ako sme si už ukázali, dostali párne číslo. Keď by sme si ako tretie zobrali nepárne číslo, s párnym by sme síce dostali nepárny súčet, no obdobne by sme s nepárnym dostali párny súčet. Ukázali sme teda, že tretie číslo ku našim prvým dvom neexistuje a teda odpoveď znie **neexistujú také tri celé čísla, ktoré by vyhovovali zadaniu.**

Iné riešenie: Všetky celé čísla sú buď párne alebo nepárne, čo znamená, že všetky čísla sa delia na dve skupiny. Pri ich sčítavaní zisťujeme, že dostávame nepárny súčet len ak sčítame párne a nepárne číslo. No my hľadáme skupinu troch čísel, čo znamená, že v trojici budú najmenej dve z niektorej zo skupín (buď dve párne alebo dve nepárne), čo znamená, že **tri nepárne súčty nikdy nedostaneme.**

Bodovanie:
za konštatovanie, že úloha sa nedá splniť – 1b.; za vymenovanie dvojíc čísel a parity ich súčtov – 2b.; za vysvetlenie, prečo sa úloha nedá splniť – 2b.

Úloha M3: Placky – *Opravovali Monika Machalová a Peter „Peťo“ Macko*
Keď sestry upiekli 25 placiek, prezradili jej, že každý hosť by si mohol dať dve placky, no tri by už každému nevyšli. Keď dorobili ďalších 10 placiek, povedali, že by pre každého hosťa bolo po tri placky, ale po štyri už nie. Nakoniec už mali 52 placiek, z ktorých by každý hosť mohol dostať štyri placky, ale päť pre každého by nevyšlo. **Pre koľkých hostí piekli placky?**

Naším cieľom bolo zistiť počet hostí. Dostali sme 3 indície:
Prvá indíca: **Pri 25 plackách sa každému ušli 2 placky, ale 3 už nie.** Ako zistíme najväčší počet hostí, ktorí ešte všetci mohli dostať po dvoch plackách?

25/2 = 12 a jedna placka nám zostane.

Z toho zisťujeme, že pokiaľ by bolo 12 hostí, každý by mohol dostať po dvoch plackách (a dokonca by ešte jedna aj zvýšila). Keby ich už bolo 13, tak aby mohli každý dostať dve placky potrebovali by ich 13×2=26, a toľko placiek už nemáme. Najviac mohlo byť teda 12 hostí.

Potrebujeme ešte zistiť aj najmenší počet hostí, ktorý vyhovuje prvej podmienke.

25/3 = 8 a jedna placka nám zvýši.

Pokiaľ by bolo 8 hostí, každému by vyšlo po troch plackách (zase by jedna dokonca zvýšila). Lenže podmienka znie, že hostí bolo toľko, aby nemohli všetci dostať po troch plackách. Preto hostí mohlo byť najmenej 9 (9×3=27, čo je viac ako bolo placiek). Z prvej indície sme zistili, že **hostí mohlo byť od 9 po 12.**

Druhá indícia: Máme už (25 + 10 =) **35 placiek a každému hosťovi sa ujdú 3 placky, ale 4 už nie.**

Najväčší počet hostí zistíme, keď vydelíme 35/3 = 11 (a zostanú nám dve placky). Ak by bolo jedenásť hostí, každému by vyšlo po tri placky. Ak by ich už bolo 12, tak by potrebovali 12×3=36 placiek, koľko už nemáme. Hostí teda môže byť najviac 11.

Na najmenší počet hostí stačí zistiť, že 35/4 = 8 (a zvýšia tri placky). To zase znamená, že ak by bolo 8 hostí, každý z nich by ešte mohol mať po štyri placky, čo nespĺňa indíciu. Hostí teda bude viac, a to najmenej 9 (9×4=36, čo je naozaj priveľa). **Hostí teda mohlo byť len od 9 po 11**, keďže číslo 12 nespĺňa druhú indíciu.

Tretia indícia: **Pri 52 plackách vyjde každému po 4, ale nie po 5 plackách.**

Zase raz, najväčší počet hostí zistíme z delenia 52/4 = 13. Pri 13 hosťoch by každý dostal presne štyri placky a žiadne by nezvýšili. Hostí je preto najviac 13.

Najmenší počet dostaneme z delenia 52/5 = 10 (a zvýšia dve placky). Pri desiatich alebo menej hosťoch by každému vyšlo po 5 placiek, čo nespĺňa indíciu. Preto hostí musí byť viac, aspoň 11 (11×5=55, čo je naozaj viac ako 52). Z tretej indície vieme, že **hostí môže byť len od 11 po 13**.

V druhej indícií sme zistili, že hostí môže byť najviac 11. Z tretej indície zase vyplýva, že hostí môže byť aj najmenej 11. Keďže teda hostí nemôže byť viac ani menej ako 11, bude ich práve toľko.

Jediné číslo, ktoré sa nachádza ako možnosť vo všetkých indíciách je iba 11, preto je to správne riešenie.

Bodovanie:
za správne vyhodnotenie indícií – 3b.; za vysvetlenie správnych čísel – 1b.; za správnu odpoveď – 1b.;

Úloha M4: Biele ruže – *Opravovali Martin „Panda" Svetlík a Tereza „Terka" Gurová*

Mladá žena dostala debničku, v ktorej bolo 1000 sadeníc červených ruží. Každá sadenica mala na sebe nálepku s číslom od 1 po 1000, pričom každé číslo bolo použité práve raz. Na debničke bolo napísané: „Medzi sadenice sa nám nedopatrením dostalo pár sadeníc bielych ruží. Sadenicu bielej ruže však poznáte ľahko:

1. Je očíslovaná trojciferným číslom.
2. Ciferný súčet čísla na sadenici je taký, že všetky iné sadenice, ktorých číslo má *rovnaký* ciferný súčet, majú na sebe *väčšie* číslo."

Koľko sadeníc bielych ruží bolo v debničke? Aké mali čísla? Poznámka: ciferný súčet čísla je súčet jeho cifier. Napríklad ciferný súčet čísla 247 je 2 + 4 + 7 = 13.

V prvom rade si uvedomíme, že sadeníc bielych ruží nebude veľa – s každým ciferným súčtom môže byť len jedna – keďže má mať číslo, ktoré je najmenšie zo všetkých, čo majú ten istý ciferný súčet.

Ako vyzerajú čísla, ktoré sú najmenšie s nejakým ciferným súčtom? Predstavme si, že chceme vytvoriť čo najmenšie číslo s ciferným súčtom napríklad 37. Napríklad číslo 23508209107 má takýto ciferný súčet, ale určite nie je najmenšie možné. Je zjavné, že čím menej cifier bude číslo mať, tým je menšie. Takže napríklad pre súčet 37 je určite menšie 87967, lebo má menej cifier.

To znamená, že všetky ciferné súčty, ktoré vieme dostať z jedno- a dvojciferných čísel, od 1 (číslo 1) až po 18 (číslo 99), nebudú na trojciferných bielych ružiach. Napríklad sadenica v zadaní s číslom 247 (ciferný súčet 13) – s týmto ciferným súčtom určite existuje menšie číslo, napríklad 67.

Druhé pozorovanie – ak majú čísla rovnako veľa cifier, tak pri porovnávaní sú najdôležitejšie číslice vľavo. Teda napríklad 3_ je určite menšie ako 8_ , nech už si do nich doplníme akékoľvek cifry. To znamená, že najmenšie číslo s nejakým ciferným súčtom bude mať čo najmenšiu prvú cifru, hoc by aj ostatné cifry boli deviatky. Napríklad pre ciferný súčet 13 máme číslo 49, čo je určite menšie ako 67, ktoré sme si vymysleli v minulom odseku.

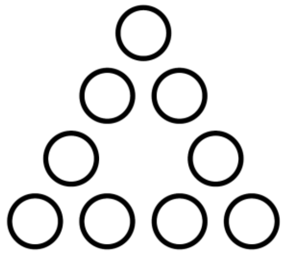
Tak, teraz už vieme, aké čísla máme hľadať na biele ruže. Začneme ciferným súčtom 19 (lebo do 18 vieme dostať z menšieho čísla). Ciferný súčet 19 má napríklad číslo 289, 397, atď., ale vysvetlili sme si, že najmenšie bude mať vľavo čo najmenšiu cifru, takže hľadáme číslo **199** – dve deviaky na konci nám dajú ciferný súčet 18, a do 19 doplníme cifru 1 na začiatok. Pre ciferný súčet 20 bude najmenšie **299**, ďalej máme **399, 499, 599, 699, 799, 899, 999** (až po ciferný súčet 27). Ciferný súčet 28 už z troch cifier nedostaneme, lebo máme najviac tri deviatky a $3 \cdot 9 = 27$. A tak tých 9 hrubo vyznačených čísel označuje všetky biele ruže.

Bodovanie:

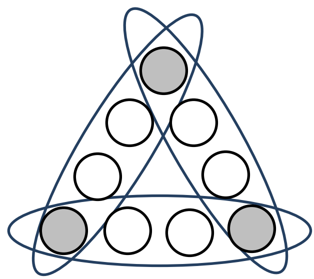
za správny výsledok – 2b., pričom ak ste si neuvedomili, že ciferné súčty do 18 to nebudú, a vypísali ste 27 riešení, za taký výsledok bolo max 1,5b.; za vysvetlenie, prečo to budú až ciferné súčty od 19 viac – 1,5b.; za vysvetlenie ako hľadať tie najmenšie čísla (prečo sú dve deviatky na konci) – 1,5.

Úloha M5: Kvetináče – *Opravovali Dávid „Puding“ Mišiak a Michal „Dvojka“ Horanský*

Deväť kruhových kvetináčov bolo poukladaných do trojuholníka ako na obrázku. V kvetináčoch bolo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 ružičiek. Kvetináče museli byť rozmiestnené tak, aby bol celkový počet ružičiek v štyroch kvetináčoch na každej strane trojuholníka rovnaký. **Rozložte kvetináče s 1 až 9 ružičkami tak, aby bol súčet počtov ružičiek na každej strane trojuholníka 21. Potom ich rozložte tak, aby bol súčet na každej strane 22. Nakoniec ich rozložte tak, aby bol súčet na každej strane rovnaký a najmenší možný.**

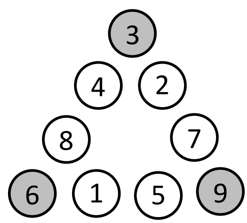


Začnime s prvou podúlohou – skúsime nájsť trojuholník so súčtom čísel na strane 21. Jednou z možností je skúšať náhodne dosádzať kvetináče na jednotlivé miesta. Môže sa však stať, že sa nám tak riešenie nepodarí nájsť, preto by sme mohli objaviť nejaký spôsob, ako takéto riešenie ľahšie nájsť.



Napríklad si môžeme všimnúť, že súčet všetkých čísel je 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45. Ak sčítame súčty kvetináčov na jednotlivých stranách, dostaneme 21 + 21 + 21 = 63. Ako je možné, že sa tieto dva súčty líšia? Je to tým, že v súčte strán sme zarátali kvetináče vo vrcholoch trojuholníka po dvakrát (na obrázku sivou farbou). Čiže v čísle 63 sú všetky kvetináče zarátané raz a kvetináče vo vrcholoch ešte raz. Zistili sme teda, že platí:

45 + súčet kvetináčov vo vrcholoch = 63



Teraz vidíme, že súčet kvetináčov vo vrcholoch musí byť 63 – 45 = 18. Hľadanie riešenia si môžeme preto uľahčiť tým, že do vrcholov ako prvé umiestnime čísla so súčtom 18 a potom budeme dopĺňať strany tak, aby ich súčty boli 21. Vo vrcholoch teda môžu byť napríklad čísla 1, 8, 9 alebo 2, 7, 9 alebo 3, 6, 9, ... Konkrétne napríklad ak do vrcholov umiestnime kvetináče 3, 6, 9, podarí sa nám doplniť čísla do strán tak, aby bol súčet každej strany 21.

Poďme na druhú otázku – trojuholník so súčtami čísel na strane 22. Všimnime si, že môžeme použiť úplne rovnaký postup ako v prvom prípade. Vieme, že súčet všetkých troch strán je 22 × 3 = 66, čo obsahuje každý kvetináč raz a kvetináče vo vrcholoch ešte raz. Ak teda odčítame súčet všetkých deviatich kvetináčov, zisťujeme, že tentokrát musí byť súčet kvetináčov vo vrcholoch 66 – 45 = 21. Sú tri možnosti, ako uložiť do vrcholov kvetináče so súčtom 21 a sú to 4, 8, 9, ďalej 5, 7, 9 a napokon 6, 7, 8. Postupne ich vyskúšame doplniť do trojuholníka:

- **4, 8, 9** Ostali nám čísla 1, 2, 3, 5, 6, 7. Na stranu k 8 a 9 musíme do súčtu strany 22 doplniť dve čísla so súčtom 22 – 8 – 9 = 5. Jediný spôsob, ako to spraviť z čísel ktoré nám ostali, je 2 + 3. Avšak na stranu k 4 a 8 potrebujeme doplniť dve čísla so súčtom 22 – 4 – 8 = 10, čo sa zo zostávajúcich čísel dá spraviť jedine ako 3 + 7. Lenže trojku sme už použili, preto sa to nedá a čísla 4, 8, 9 nemôžu byť vo vrcholoch trojuholníka.
- **5, 7, 9** Teraz nám ostanú čísla 1, 2, 3, 4, 6, 8. K 7 a 9 musíme doplniť dve čísla so súčtom 22 – 7 – 9 = 6. Jediný spôsob, ako to spraviť, je 2 + 4. Na stranu k 5 a 9 potrebujeme doplniť dve čísla so súčtom 22 – 5 – 9 = 8, čo sa zo zostávajúcich čísel dá spraviť len ako 2 + 6. Keďže sme ale dvojku použili na prvú stranu, ani čísla 5, 7, 9 nemôžu byť vo vrcholoch trojuholníka.
- **6, 7, 8** Mohli by sme postupovať podobne ako v minulých prípadoch, alebo si všimneme, že na strany máme doplniť dvojice čísel so súčtami postupne 22 – 6 – 7 = 9, 22 – 6 – 8 = 8 a 22 – 7 – 8 = 7. Pritom jedným z čísel, ktoré nám ostali, je 9, lenže ktorékoľvek číslo pričítame k 9, súčet bude väčší aj ako 9, aj ako 8, aj ako 7, takže deviatku by sme nevedeli uložiť na žiadnu stranu. Preto ani čísla 6, 7, 8 nemôžu byť v rohoch.

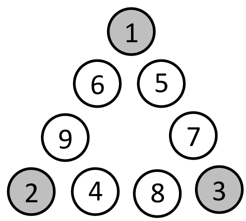
Zistili sme teda, že nech už by sme čísla rozložili akokoľvek, trojuholník so súčtami čísel na každej strane 22 sa **nedá vytvoriť**.

Pozrime sa ešte na tretiu otázku. Tu nemáme zadaný súčet čísel na strane, ale vieme, že má byť čo najmenší možný. My už sme zistili, že trojnásobok súčtu čísel na každej strane je vlastne súčet všetkých deviatich kvetináčov (to je 45) plus tri kvetináče vo vrcholoch. Čiže ak dáme do vrcholov kvetináče s čo najmenším súčtom, bude aj trojnásobok súčtu čísel na jednej strane najmenší možný, čiže aj súčet čísel na každej strane bude najmenší možný.

Najmenšie čísla, ktoré vieme uložiť do vrcholov trojuholníka, sú 1, 2 a 3. Potom bude platiť:

3 × súčet čísel na každej strane = 45 + 1 + 2 + 3 = 51

Teda súčet čísel na každej strane by mal byť 51 ÷ 3 = 17. Pozor, teraz nám nestačí povedať, že najmenším súčtom je 17, lebo by sa ešte pokojne mohlo stať, že taký trojuholník nebude existovať, podobne ako v prípade súčtu 22. Musíme ho teda ešte vytvoriť. Avšak poukladať zostávajúce čísla 4, 5, 6, 7, 8, 9 do dvojíc tak, aby strany mali súčet 17, je už malina. Jedno možné rozloženie vidíme na obrázku.



Bodovanie:

za zistenie, že 3 × strana = 45 + vrcholy (alebo iný spôsob) – 2b.; za trojuholník, ktorý je riešením prvej úlohy – 1b.; za riešenie tretej úlohy – 1b.; za úplný dôkaz, že druhá otázka nemá riešenie – 1b.