Vzorové riešenia 2. série, kategória 5–7

Úloha M1: Pirátsky súd – *Opravoval Jakub Hluško*

„Po celú dobu súdu budete každý zatvorený v inej zvukotesnej kajute bez okien, takže spolu nebudete môcť nijako komunikovať. Keď budete vo svojich kajutách, obaja dostanete po jednej karte, ktorá bude buď červená alebo čierna (nezávisle na farbe toho druhého). Potom sa vás prídem opýtať, či je karta toho druhého červená alebo čierna. Ak obaja *uhádnete*, súd prehráte a bude s vami zle-nedobre. Zachránite sa, ak aspoň jeden z vás neuhádne správne kartu toho druhého." Deti našťastie pred súdom ešte mali čas a vymysleli si taktiku. **Akú taktiku si mali dohodnúť, aby sa určite oslobodili?**

Všetky možné rozdania kariet si môžeme rozdeliť na dve možnosti – Eva a Kristián môžu mať rovnaké, alebo rôzne farby kariet.

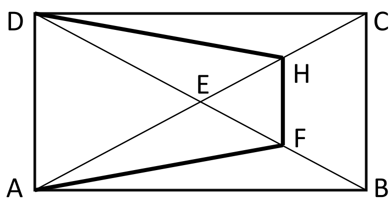
Keďže potrebujú, aby aspoň jeden z nich **neuhádol**, môžu sa zariadiť nasledovne. Eva povie, že Kristián má rovnakú farbu karty ako ona – keďže farbu svojej karty vie, Kristiánovej karte bude hádať rovnakú farbu, ako vidí vo svojej ruke. Ak mali rôzne farby kariet, Eva neuhádla a sú oslobodení. No v prípade, že obaja skutočne mali rovnaké farby kariet, Eva farbu Kristiánovej karty uhádne a tak zostáva len na Kristiánovi aby neuhádol. Preto Kristián musí obdobným spôsobom tvrdiť, že Eva má inú farbu karty ako on, teda neuhádne v prípadoch, že farby kariet oboch detí sú rovnaké. V ostatných prípadoch však neuhádne Eva a tak sme ukázali, že v každom prípade neuhádne aspoň jedno (v tomto prípade práve jedno) z detí. Samozrejme, ak úlohy Evy a Kristiána vymeníme, dokážu sa oslobodiť rovnako dobre.

Bodovanie:

za nájdenie správneho riešenia – 3b.; za ukázanie, že to bude naozaj fungovať vždy – 2b.

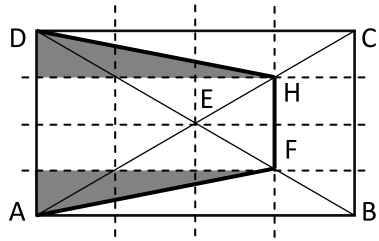
Úloha M2: Stolík – *Opravovali Martin „Panda" Svetlík a Terézia Gurová*

Na stolíku bol nakreslený obdĺžnik *ABCD*. Jeho uhlopriečky sa pretínali v bode *E*. V strede úsečky *BE* bol nakreslený bod *F* a v strede úsečky *CE* bol nakreslený bod *H*. Obsah obdĺžnika *ABCD* bol 16 cm^2. **Aký bol obsah štvoruholníka *AFHD*?**



Aby sme vedeli, ako vyzerá štvoruholník AFHD, ktorého obsah chceme zistiť, najprv si celú situáciu nakreslíme. Je to lichobežník, ale tí, ktorí ešte nevedia, ako sa ráta obsah lichobežníka, vôbec nemusia zúfať. Určite všetci vieme rátať obsahy na štvorčekovej sieti. Lenže ako by vyzeral tento útvar na štvorčekovej sieti, keď nevieme, aké dlhé sú strany ABCD, len to, že má obsah 16 cm^2? To by ten obdĺžnik mohol mať rozmery (všetko v centimetroch) 2×8; 16×1; ale aj 3,2×5; 20×0,8 alebo nebodaj 7×(16/7), atď atď.

Mnohí z vás prišli na fintu nakresliť si vlastnú sieť, ktorá síce nebude štvorčeková, ale bude nám vyhovovať. Vieme, že uhlopriečky sa rozpoľujú v strede, a tak kolmice na strany obdĺžnika cez bod E každá delia ABCD na polovice (pravú a ľavú, resp. hornú a dolnú). Keďže body F a H sú v stredoch EB a EC, tak aj kolmice cez tieto body budú deliť tieto polovice na polovice (teda vlastne na štvrtiny celého ABCD). V konečnom dôsledku teda máme obdĺžničkovú sieť 4×4, na ktorej je útvar AFHD celkom pekne nakreslený.



Vieme, že jeden malý obdĺžniček má obsah 1 cm^2 (lebo ich je 16 a dokopy majú 16 cm^2). Teraz už vieme zrátať, že AFHD sa skladá zo 6 celých obdĺžničkov a dvoch trojuholníkov (vyznačené šedou), ktoré sú polovica z 3×1 obdĺžnička, a teda majú každý 1,5 cm^2.

Celý útvar AFHD má teda $6\ cm^2 + 2 \cdot 1{,}5\ cm^2 = 9\ cm^2$.

Bodovanie:

Keďže sa našlo asi 10 rôznych dôkazov, pričom každý bol založený na niečom inom, a všetky správne, tak jednotné bodovanie sa nedá napísať. Dôležité bolo samozrejme vysvetliť, prečo platia veci, ktoré vravíte, že platia. Zopár riešiteľov to riešilo pre konkrétny obdĺžnik, napr. 8×2 a v ňom ste potom vyrátali konkrétne dĺžky. Za taký postup ste mohli získať okolo 4 bodov.

Úloha M3: Noty – *Opravovali Michaela Zatrochová, Jakub Pojlovka a Fedor Župník*

Zatiaľ čo Evička hľadala čo najmelodickejšie usporiadania ústrižkov, Kristián sa bavil skladaním rôzne dlhých úsekov zo štvornotových a deväťnotových ústrižkov bez toho, aby sa ústrižky prekrývali. Zistil, že dokáže vytvoriť rady dĺžky napríklad 12 nôt (4 + 4 + 4), 13 nôt (9 + 4) alebo 17 nôt (9 + 4 + 4). Nedokázal však vytvoriť napríklad rady dĺžky 6, 11 alebo 14 nôt. **Aký najdlhší rad nôt nemohol Kristián vytvoriť?**

Cieľom je nájsť také najväčšie číslo, ktoré sa nedá zapísať ako súčet rôznych počtov deviatok a štvoriek.

Ako prvé si všimneme, že čísla, ktoré skladáme, môžu mať po delení štyrmi zvyšok 0, 1, 2 alebo 3. Tiež si všimneme, že v rade štvoriek, 4+4+4+...+4, ktorý reprezentuje číslo deliteľné štyrmi, môžeme zmazať dve štvorky a namiesto nich pridáme deviatku, ktorá sa dá zapísať ako 2·4+1. Takto dostaneme číslo o jedna väčšie, teda číslo, ktoré bude mať po delení štyrmi zvyšok o jedna väčší = zvyšok jedna. Podobne dostaneme číslo so zvyškom dva ak zmažeme z takého radu štyri štvorky a pridáme dve deviatky. Môžeme tiež uvažovať číslo, ktoré sme dostali v prvom kroku, 4+4+...+4**+9**, a prvý krok zopakovať, čím dostaneme zase zvyšok o jedna väčší, tentokrát o jedna väčší ako jedna, čiže dva. Číslo so zvyškom tri dostaneme číslo, ak zmažeme šesť štvoriek a pridáme tri deviatky, teda zopakujeme prvý krok trikrát.

Mohlo by sa zdať, že sa nám takto podarí zapísať všetky čísla, bez ohľadu na zvyšok po delení štyrmi. Pri tomto postupe ale predpokladáme, že v každom kroku máme v zápise čísla ešte aspoň dve štvorky, ktoré môžeme nahradiť deviatkou. Štyri po sebe idúce čísla vieme potom zapísať ako 4+4+4+…+4, 4+4+4+…+4**+9**, 4+4+4+…+4**+9+9** a 4+4+4+…+4**+9+9+9**. Pričom každý zápis obsahuje o dve štvorky menej, ako ten predošlý. Minimálny počet štvoriek, ktorý musí obsahovať prvý zápis je 6, pretože dokopy v troch krokoch uberieme 6 štvoriek. Ak toto splníme, podarí sa nám vytvoriť všetky štyri takéto zápisy. 4+4+4+4+4+4 = 24. Toto je najmenšie číslo, ktoré dokážeme vytvoriť. Keby sme chceli vytvoriť číslo 23, všimneme si, že toto číslo má po delení štyrmi zvyšok 3. Teda jeho zápis musí obsahovať aspoň tri deviatky, avšak 9+9+9=27, čo je viac ako 23. **Preto 23 je najväčším číslom, ktoré nevieme vytvoriť.**

Bodovanie:

za riešenie s číslom 23 – 2b.; za skúmanie deliteľnosti 4 a 9 a odôvodnenie, prečo to pre čísla väčšie ako 23 ide – 3b.

Úloha M4: Krabice – *Opravoval Juraj Pavlovič*

Žena si pamätala, že ráno mala červenú, žltú a zelenú krabicu postavené na stole v rade vedľa seba. No nepamätala si, v akom boli poradí. Pamätala si, že najskôr bolo v zelenej krabici dvakrát toľko čokoládových zajacov ako v žltej. Potom zobrala päť čokoládových zajacov z krabice vľavo a predala ich. Nakoniec preložila presne polovicu počtu zvyšných čokoládových zajacov z ľavej krabice doprava do červenej krabice. **Akú farbu mala krabica, ktorá stála vľavo?**

Ako prvú rovno vylúčime **červenú** krabicu, keďže zadanie priamo hovorí o presúvaní čokoládových zajacov z ľavej do červenej krabice. Takže **červená isto nebola tá ľavá**.

Ďalej vieme, že ako posledný krok žena rozdelila čokoládových zajacov v **ľavej** krabici presne na dve polovice. To mohla urobiť jedine v prípade, že v tej krabici bol *párny počet*. Lenže ešte predtým z tej istej krabice odobrala (predala) 5 zajacov. Takže aký musel byť počet zajacov na začiatku, aby sme odobratím piatich dostali párny počet? Áno, presne tak, **v ľavej krabici musel byť na začiatku *nepárny* počet** čokoládových zajacov.

Lenže my vieme aj to, že na začiatku bol v **zelenej** krabici *dvojnásobný počet* zajacov ako v žltej. No a dvojnásobok akéhokoľvek počtu je určite *párne číslo*. Takže sme prišli na to, že v zelenej bol párny počet a v ľavej musel byť nepárny počet. Tým pádom je jasné, že ani **zelená krabica isto nebola tá ľavá**. Vylúčili sme červenú aj zelenú, ostáva jediná možnosť: **krabica vľavo mala žltú farbu**.

Bodovanie:

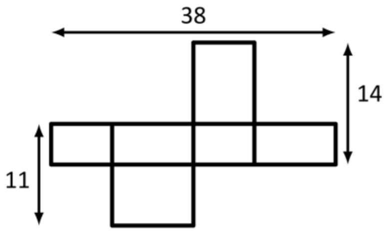
za správnu odpoveď (bez ohľadu na vysvetlenie postupu) - 0,5b.; za vylúčenie červenej - 1b.; za zistenie, že ľavá musí obsahovať na začiatku nepárny počet zajacov - 2b.; za zistenie, že zelená na začiatku obsahuje párny počet zajacov - 1b.; za vylúčenie zelenej a záver, že vľavo musí byť žltá - 0,5b.

Poznámka:

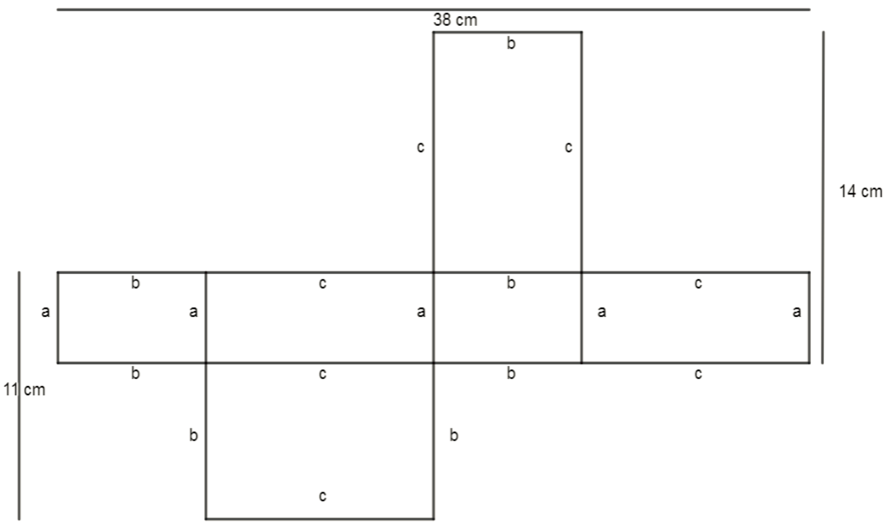
Aby sme boli matematicky dôslední, nakoniec by sme ešte mali overiť, že situácia so žltou krabicou celkom vľavo naozaj môže nastať. Zatiaľ sme totiž naozaj s <u>istotou</u> zistili iba to, že vľavo <u>nemôže byť červená</u> a <u>nemôže byť zelená</u> krabica. To však ešte nie je stopercentnou zárukou, že tam <u>môže</u> byť žltá - ešte stále by úloha mohla byť taká, že nemá vôbec žiadne riešenie. Našťastie je to veľmi jednoduché, stačí predsa nájsť nejaké konkrétne počty zajacov, ktoré mohli byť v krabiciach. Napríklad Ž=7; Z=14; Č=1. Ľahko overíme, že s týmito začiatočnými počtami sa skutočne dajú spraviť všetky úkony popísané v zadaní.

Úloha M5: Obal – *Opravovali Timea Szöllősová a Miroslav Macko*

Zelenkavý obal mal tvar kvádra. No ešte nebol poskladaný a na stole ležal len jeho plášť, ktorý mal rozmery v centimetroch ako na obrázku. **Aký bol objem čokolády v zelenkavom obale?**



V zadaní sme dostali nakreslený plášť kvádra a k tomu zadané nejaké dĺžky. Kváder má tri rôzne dĺžky strán, na to aby sme zistili jeho objem, tak musíme poznať dĺžku každej jeho hrany. Na obrázku môžeme vidieť tri rôzne strany obdĺžnikov tvoriacich obal, ich dĺžky si označme a, b, c.



Teraz si zapíšeme, čo máme povedané na obrázku - dĺžky. Z obrázku vyplývajú nasledovné vzťahy. Všetky dĺžky uvažujeme v centimetroch.

1. $a + b = 1$
2. $a + c = 14$
3. $b + c + b + c = 38$ *//obe strany predelíme dvomi*
   $b + c = 19$

Napísali sme si tri rovnice, ktoré nám popisujú dĺžky rozmerov kvádra. Ostáva nám už len upraviť rovnice aby sme zistili dané dĺžky. Z prvej rovnice si vyjadríme b, z druhej rovnice si vyjadríme c.

4. $b = 11 - a$
5. $c = 14 - a$

Dosadíme za b a c do tretej rovnice.

$11 - a + 14 - a = 19$
$25 \ - 2a = 19$ *// pripočítame 2a k obom stranám*
$25 = 2a + 9$ *// odčítame 19*
$6 = 2a$ //vydelíme dvomi
$3 = a$

Keď už poznáme a, tak ho môžeme dosadiť $a = 3$ do štvrtej a piatej rovnice.

$b = 11 - a = 11 - 3 = 8$
$c = 14 - a = 14 - 3 = 11$

Spomenieme si, že všetky čísla boli v centimetroch, preto rozmery a, b, c nášho kvádra sú 3 cm, 8 cm a 11 cm. Objem kvádra získame vynásobením jeho rozmerov. Objem kvádra je $3\ cm \cdot 8\ cm \cdot 11\ cm \ = 264\ cm^3$

Zistili sme aký je objem kvádra, ktorý dostaneme zložením zelenkavého obalu, to je zároveň aj objem čokolády, ktorá sa doň zmestí. Objem čokolády v zelenkavom obale je 264 cm^3.

Bodovanie:
za správne zapísanie a vyhodnotenie údajov zo zadania – 1b.; za správny výsledok – 0,5b.; za správny postup, ako sa k výsledku dopracovať – 3,5b,