Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

36. ročník www.pikomat.sk školský rok 2018/2019

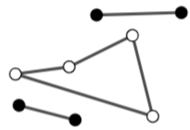
Vzorové riešenia 3. série, kategória 5–7

Úloha M1: Súhvezdie – *Opravoval Jakub Poljovka*

Evička si nakreslila desať hviezd: päť nakreslila bielou farbou a päť žltou farbou. Evička chcela pospájaním niektorých hviezd čiarami nakresliť také súhvezdie, že:

- každá biela hviezda bude spojená čiarou s párnym počtom hviezd ľubovoľnej farby,
- každá žltá hviezda bude spojená čiarou s nepárnym počtom hviezd ľubovoľnej farby.

Mohlo sa podariť Evičke také súhvezdie nakresliť? Ak áno, nakresli ako, ak nie, vysvetli prečo. A čo ak by hviezd bolo osem: štyri biele a štyri žlté?



Vyriešme najprv úlohu s ôsmimi hviezdami. V tomto prípade nám postačí sa s danou úlohou trochu pohrať a určite sa nám po krátkom čase podarí vytvoriť súhvezdie podľa zadania. Jedno také môžeš vidieť aj na obrázku (žlté hviezdy sme nahradili čiernymi).

Väčší problém nastane, keď sa pokúsime takéto súhvezdie vytvoriť s desiatimi hviezdami. Nech sa snažíme ako sa snažíme, nejako sa nám ho nedarí nakresliť. Až nakoniec zrejme nadobudneme presvedčenie, že sa to nedá. Tu by však naša snaha nemala skončiť, ba práve naopak. Teraz by sme sa mali začať zamýšľať, či existuje nejaký dôvod, prečo by sa také súhvezdie nemalo dať nakresliť.

Zameriame sa na celkový počet koncov čiar. Bude nás konkrétne zaujímať, či je počet týchto koncov párny, alebo nepárny. Zároveň využijeme techniku, ktorá sa zvykne v matematike nazývať **počítanie dvoma spôsobmi.** Ako názov napovedá, tento počet vyjadríme najprv prvým, a potom druhým spôsobom.

Prvý spôsob:
Každá čiara má dva konce (hviezdy, ktoré spája). To znamená, že koncov čiar je dvakrát viac ako čiar samotných. Z toho jasne vyplýva, že počet koncov čiar je **párny**. (1 čiara má 2 konce, 2 čiary majú spolu 4 konce, 3 čiary majú spolu 6 koncov...)

Druhý spôsob:
Celkový počet koncov čiar vieme vypočítať aj tak, že spočítame najprv počet koncov v bielych hviezdach, potom počet koncov v žltých hviezdach a tieto počty nakoniec spočítame.

Máme 5 bielych hviezd a v každej z nich sa nachádza párny počet koncov čiar (keďže každá biela hviezda je spojená s párnym počtom hviezd ľubovoľnej farby). Celkovo teda sčitujeme päť párnych čísel. A keďže súčet párnych čísel je znova párne číslo, tak počet koncov v bielych hviezdach je <u>párny</u>.

Máme 5 žltých hviezd a v každej z nich sa nachádza nepárny počet koncov čiar. Celkovo teda sčitujeme 5 nepárnych čísel. Vieme, že súčet dvoch nepárnych čísel je číslo párne a súčet párneho a nepárneho čísla je číslo nepárne. Z toho vyplýva, že súčet troch nepárnych čísel je nepárny (<u>nepárne + nepárne</u> + nepárne= <u>párne</u> + nepárne= nepárne). Potom súčet štyroch nepárnych čísel je párny a súčet piatich nepárnych čísel je znova nepárny. Takže vidíme, že počet koncov v žltých hviezdach je <u>nepárny</u>.

Teraz nám už len zostáva spočítať počet koncov v bielych a počet koncov v žltých hviezdach a dostaneme celkový počet koncov. Vidíme, že ide o súčet <u>párneho</u> a <u>nepárneho</u> čísla, takže tento súčet bude nepárny. Vyšlo nám teda, že celkový počet koncov čiar je **nepárny**.

Všimnime si, že keď sme celkový počet koncov čiar rátali prvým spôsobom, vyšlo nám, že musí ísť o **párne** číslo. Avšak keď sme tento počet rátali druhým spôsobom, vyšlo nám, že to musí byť číslo **nepárne**. A keďže žiadne číslo nie je párne aj nepárne zároveň, vieme z toho naozaj usúdiť, že **Evička zadané súhvezdie nakresliť nevie**. Ak by totiž zadané súhvezdie existovalo, muselo by mať párny, aj nepárny počet koncov čiar zároveň.

<u>Bodovanie</u>:
za nakreslenie vyhovujúceho súhvezdia pri ôsmich hviezdach – 1b.; za dôkaz, že pri desiatich hviezdach sa Evičke nemohlo podariť nakresliť súhvezdie – 4b.

> **Úloha M2: Hľadanie** – *Opravovali Ľudmila Šimková a Michaela „Jerry" Dlugošová*
>
> Tom mal hľadať špeciálne palindrómy. Palindróm je číslo, ktoré sa číta spredu rovnako ako zozadu, napríklad číslo 30503 je palindróm. Tom mal nájsť všetky päťciferné palindrómy, ktoré sú deliteľné číslom 12 a nachádzajú sa v nich cifry 2 a 4 *bezprostredne vedľa seba*. **Pomôž Tomovi a nájdi všetky takéto päťciferné palindrómy.**

Na začiatku hľadáme číslo, ktoré je palindróm, nachádzajú sa v ňom cifry 2 a 4 hneď vedľa seba a je deliteľné 12. Nechajme si deliteľnosť až na koniec, pozrime sa najskôr ako môže vyzerať palindróm s 2 a 4.

1. 24*42
2. *242*
3. *424*
4. 42*24

Teraz, keď si už vieme predstaviť naše číslo, pozrime sa na deliteľnosť. Aby bolo číslo deliteľné 12, musí byť deliteľné 3 a zároveň 4 (viac v poznámke). Zopakujme si v krátkosti čo platí pre čísla deliteľné 3 a 4:

Číslo je deliteľné 3 práve vtedy, keď aj jeho ciferný súčet je deliteľný 3.
Číslo je deliteľné 4 práve vtedy, keď jeho posledné dvojčíslie je deliteľné 4.

Ak sa pozrieme na prvú možnosť nášho čísla vidíme, že končí 42, čo nie je deliteľné 4. Túto možnosť môžeme vylúčiť.

Pozrime sa na poslednú, teda štvrtú možnosť. Vidíme, že 24 je deliteľné 4, takže už nám stačí zabezpečiť iba deliteľnosť 3. 42*24 má ciferný súčet 12, čo je deliteľné 3. Potrebujeme ešte doplniť prostrednú cifru tak, aby sme túto deliteľnosť neporušili. Tomu vyhovujú iba násobky 3 a dostávame tak riešenia **42024**, **42324**, **42624** a **42924**.

Druhá možnosť – tu si musíme dať väčší pozor na deliteľnosť 4. Zamyslime sa, aké násobky čísla 4 máme v rozmedzí 20 – 29 (keďže na mieste desiatok máme cifru 2). Sú to 20, 24 a 28. Ak by sme sa rozhodli pre 20, poslednou cifrou by bola 0 a keďže číslo má byť palindróm, musela by to byť aj prvá cifra. Dostali by sme tak 02420, čo nie je 5-ciferné číslo. Ostávajú nám teda 42424 alebo 82428. Nekontrolovali sme už len jedinú podmienku a to deliteľnosť 3. Vidíme, že 4+2+4+2+4=16, čo nie je deliteľné 3. Na druhú stranu 8+2+4+2+8=24 je deliteľné 3, a preto **82428** je ďalšie riešenie.

Tretia možnosť – rovnako ako pri druhej možnosti zistíme, že hľadané číslo musí končiť 40, 44 alebo 48. Už sme si ukázali, prečo to nemôže byť 40, ostávajú nám preto iba 44244 alebo 84248. Skontrolujeme už len deliteľnosť 3. 4+4+2+4+4=18, čo je deliteľné 3, a preto **44244** je riešením. Avšak 8+4+2+4+8=26, čo nie je deliteľné 3.

Dostávame tak riešenia **42024**, **42324**, **42624**, **42924**, **82428** a **44244**.

Bodovanie:
za nájdenie jednotlivých riešení – 3b. (0,5b. za každé); za kompletný postup – 2b.

Poznámka:
Prečo práve tieto dve čísla? Sú nesúdeliteľné – to znamená, že okrem 1 nemajú spoločného deliteľa, teda ak je číslo deliteľné 3 a 4, musí byť deliteľné aj ich súčinom 12. Keby sme si vzali napríklad čísla 2 a 6, ktorých súčin je tiež 12, číslo 18 by bolo deliteľné oboma, ale nie samotnou 12. Je to preto, lebo 2 a 6 sú súdeliteľné – 2 delí oboje.

> **Úloha M3: Schodiská** – *Opravovali Kristína Prešinská a Marianna Hronská*
> V laboratóriu bolo červené a modré schodisko. Celková výška oboch schodísk bola rovnaká, no modré schodisko malo o päť schodov viac ako červené. Antonio v ten deň vyšiel šesťkrát na horné poschodie a šesťkrát zase zišiel na dolné poschodie. Ktoré schodisko si vybral na každú cestu však zabudol. Pamätal si však, že takto šľapol na rovnako veľa červených aj modrých schodov, pričom dokopy *vystúpal* 12 výškových metrov. **Aký vysoký bol jeden červený schod?**

Pokúsme sa prepísať si zadanie do matematickejšej formy, aby sme si vedeli vyjadriť vzťahy medzi schodmi a schodiskami. Takto bude jednoduchšie prísť na to, aký vysoký je jeden červený schod.

Vieme, že červené a modré schodisko boli rovnako vysoké. Modré schodisko malo o 5 schodov viac ako červené. To si vieme stručne zapísať pomocou rovnice takto: $č+5=m$, kde $č$ je počet schodov na červenom schodisku a m je počet schodov na modrom schodisku. Ďalej vieme, že Antonio šesťkrát vyšiel na horné poschodie a šesťkrát zišiel na dolné poschodie, teda po schodiskách šiel dvanásť krát dokopy. Ak si označíme x koľkokrát šiel červeným schodiskom a y koľkokrát šiel modrým schodiskom, tak x a y je spolu 12 ciest po niektorom schodisku, teda $x+y=12$. Keď Antonio šiel x-krát po červenom schodisku, tak stúpil spolu na $č\cdot x$ červených schodov. Podobne vieme, že Antonio stúpil na $m\cdot y$ modrých schodov. Ešte vieme aj to, že Antonio stúpil na rovnaký počet modrých a červených schodov, čo znamená, že $č\cdot x=m\cdot y$.

Poďme si to zhrnúť. Súčasne musia platiť tieto tri rovnice:

1. č+5=m
2. x+y=12
3. č·x=m·y

Z prvej rovnice si vieme m nahradiť ako č+5, čo dosadíme do tretej rovnice. Tretia rovnica po takomto prepise vyzerá nasledovne: č·x=(č+5)·y=č·y+5·y. Poďme sa zamyslieť nad druhou rovnicou. Vieme niečo o x a y? Vieme, že sú to prirodzené čísla. Nemôžu byť 0, pretože v takom prípade, by sme po schodisku nevedeli chodiť.

Vieme aj to, že červených schodov je menej ako modrých a keďže Antonio stúpil na rovnaký počet modrých a červených schodov, tak po červenom schodisku musel ísť viac krát. Teda x>y. Druhá rovnica nám hovorí, že x+y=12 a platí aj, že x>y, z čoho máme pre x a y len zopár možností a tie odskúšame a zistíme koľko je červených schodov na schodisku!

Možnosti môžeme vidieť v tejto tabuľke:

x	7	8	9	10	11
y	5	4	3	2	1

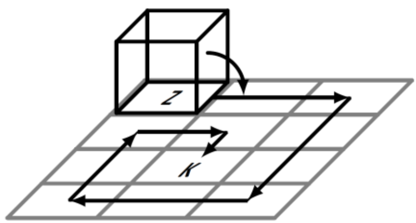
Keď si každú z týchto možností dosadíme do tretej rovnice, tak len pre jednu rovnicu bude platiť, že č a m sú prirodzené čísla, čo od čísel č a m potrebujeme aby spĺňali, pretože vyjadrujú počet schodov a to je prirodzené číslo. Táto možnosť je pre x=8 a y=4. Naša tretia rovnica vtedy vyzerá č·8=č·4+5·4. Jej riešením je č=5. Zistili sme, že červené schodisko má 5 schodov.

Antonio vystúpal 12 metrov a šiel šesťkrát hore schodmi. Jedno schodisko musí mať výšku 12/6=2 metre. Červené schodisko má 5 schodov a teda jeden schod má výšku 2/5 metra = 0,4 metra = 40 centimetrov.

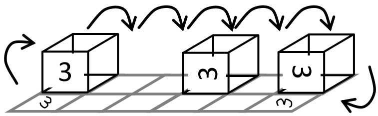
Bodovanie:
za zistenie, že výška jedného schodiska je 2 metre – 1b.; za uvedomenie si, že po červenom schodisku prešiel Antonio viackrát ako po modrom, rovnicový zápis a opis postupu – 3 b.; za správny výsledok – 1b.

Úloha M4: Kotúľavá kocka – *Opravovali Peter Ralbovský a Patrik Rusnák*

Bežná hracia kocka – teda taká, že súčet počtu bodiek na stenách oproti sebe je vždy sedem – sa kotúľala tak, ako je nakreslené na obrázku a cestou otláčala svoje bodky na plátno. Keď zastala na poslednom políčku (na obrázku označené *K*), bolo na plátne vidieť otlačených celkom 32 bodiek. Keď Kristián zdvihol kocku z plátna, videl, že na plátne bolo otlačených celkom 36 bodiek. **Koľko bodiek muselo byť otlačených na začiatočnom políčku (na obrázku označené *Z*)? Jedna stena kocky sa plátna nedotkla ani raz, koľko bodková stena to bola?**



Táto úloha sa dala ľahko vyriešiť s kockou v ruke, ale šlo to aj bez nej. Ukážeme si najprv riešenie bez skutočnej kocky, aby sme udržali napätie. Keď sa kocka kotúľa stále jedným smerom, na jej bočnej stene je stále to isté číslo. Tento fakt môžeme použiť hneď niekoľko krát. Napríklad, keď sa kocka kotúľa po políčkach B,C,D,E (viď označenie na obrázku), tak na jej ľavej stene bude stále to isté číslo. Bude to to číslo, ktoré bolo na políčku A, a na to isté číslo sa prevráti aj na políčko F. Podobne, pri kotúľaní G,H,I je na pravej stene to isté číslo, takže na F a J sa otlačí to isté. Teda **A=F=J**, označme ich všetky písmenom x. Pri kotúľaní E,F,G je na zadnej stene to isté, takže **D=H**, označme toto číslo y.



Z	A	B
I	J	C
H	K	D
G	F	E

Ďalej vieme, že hracia kocka má na stenách oproti sebe súčet 7. Čísla, ktoré sú oproti sebe, sa na plánik otlačia po dvoch otočeniach tým istým smerom. Teda ak na Z bola 1, tak na B bude 6, ak na Z bola 5, tak na B bude 2, a podobne.

Zo zadania vieme, že súčet všetkých otlačených čísel okrem posledného políčka bol 32. To znamená *Z*+**A**+*B*+*C*+**D**+*E*+**F**+*G*+**H**+*I*+**J**=32. Z predošlého odseku vieme, že Z+B=7, C+E=7, G+I=7, takže to odrátame a dostaneme, že A+D+F+H+J=11. No a to sú práve čísla x a y. Keďže musíme sčítať tri rovnaké čísla (A,F,J) a dve iné rovnaké čísla (D,H), aby sme dostali 11, vychádza to jedine tak, že $x = 1, y = 4$.

Z	x	B
I	x	C
y	K	y
G	x	E

Keďže D=y=4, tak B musí byť 3, lebo je oproti D. **Potom Z musí byť 4**, lebo je oproti B.

Druhá otázka – ktoré číslo sa neotlačilo vôbec? Zistíme, že K je 4, lebo pri otáčaní I,J je na prednej stene rovnaké číslo, takže H=K). Ostávajú nám čísla C,E,G,I. Tie musia byť 2 a 5. Prečo? Lebo E aj G susedia s 1 a 4. Takže nemôžu byť ani 1, ani 4, ale ani 6 a 3, lebo tie čísla musia byť oproti 1 a 4, nie susediť s nimi. Takže E a G sú 2 a 5 (alebo 5 a 2), a potom C a I sú 5 a 2 (alebo 2 a 5), lebo sú oproti nim. **Jediné číslo, ktoré nikde nemáme, je číslo 6.**

4	1	3
I	1	C
4	4	4
G	1	E

Všimnite si, že sme vôbec nepoužili fakt, že celkový súčet je 36, a teda ani že K=4 (resp. to sme si dorátali aj bez toho celkového súčtu). Ale koľko pekných myšlienok sme si ukázali ☺. Samozrejme, aj riešenie, kde použijem skutočnú kocku a celkový súčet, vie byť za 5 bodov. Najlepšie bolo začať od konca – vieme, že súčet bodiek okrem posledného políčka bol 32 a súčet aj s poledným políčkom bol 36. To znamená, že na poslednom políčku musela byť otlačená **štvorka**. Postavíme teda kocku štvorkou na políčko *K*, a kotúľame ju naspäť. Máme 4 možnosti, čo bude susedné s touto štvorkou, teda čo bude na predposlednom políčku – 1,2,5,6 (3 nemôže byť, to je oproti). Vyskúšame všetky 4, a ak sme dobre kotúľali, dostali sme takéto niečo:

4	1	3
5	1	2
4	4	4
2	1	5

4	2	3
1	2	6
4	4	4
6	2	1

4	5	3
6	5	1
4	4	4
1	5	6

4	6	3
2	6	5
4	4	4
5	6	2

Vidíme, že vždy vo všetkých **je na Začiatku štvorka**, tak ktorá je tá správna tabuľka? Teraz nám už len stačí zrátať súčet v každej tabuľke, a vidíme, že len v prvej je súčet 36. No a v tej **nie je na žiadnom políčku šestka**.

Bodovanie:
za zistenie, že na poslednom políčku boli otlačené 4 bodky – 0,5b.; za zistenie, že na začiatočnom políčku boli otlačené 4 bodky – 1b.; za zistenie, že na žiadnom políčku nebolo otlačených 6 bodiek – 1b.; za kompletný postup – 2,5b.

Úloha M5: Kód – *Opravovali Matej „Hovorca“ Hrmo a Michaela Zatrochová*
Nad dverami videli vyrytý príklad: *ABC* + *ADEFF* + *GFHFI* = *ABFJHF*. **Ako bolo treba zameniť písmenká za cifry (rovnaké za rovnaké, rôzne za rôzne) tak, aby zadaný príklad platil? Nezabudni nájsť všetky riešenia.**

V zadaní máme desať rôznych písmen, musíme za ne teda doplniť všetky cifry od 0 po 9. Pre väčšiu prehľadnosť, zapíšme si náš príklad ako sčítanie pod seba:

			A	B	C
	A	D	E	F	F
	G	F	H	F	I
A	B	F	J	H	F

Sčítavame dve päťciferné čísla a jedno trojciferné – výsledok je šesťciferný. Ak sčítame hoc aj najväčšie možné päť a trojciferné čísla (99999+99999+999=200997), nikdy nedostaneme výsledok, ktorý začína číslicou väčšou ako 2. Vieme teda s istotou povedať, že buď A=1 alebo A=2. Možnosť A=0 neprichádza do úvahy, nakoľko A je prvá číslica tak výsledku, ako aj dvoch sčítancov.

Pozrime sa na rády stotisícok a desaťtisícok. Ak A=2, tak by muselo platiť, že 2+G je číslo, ktoré bude aspoň 20. A to nemôže nastať, nakoľko aj keby G=9, tak A+G=2+9=11. Zvyšok zo sčítavania v ráde tisícok by tak musel byť aspoň 9, no taký zvyšok jednoducho zo sčítavania dvoch číslic nie je možné dostať. Preto môžeme s istotou tvrdiť, že **A=1**.

Poďme sa teraz pozrieť na písmeno D. Súčet D+F musí končiť cifrou F. Jednoduchým riešením by bolo povedať si, že D=0. Ak sa však D=0, tak pri sčítavaní v ráde tisícok neprechádzame cez desiatku (0+F=F). Ak A=1 a A+G má mať prechod cez desiatku, tak sa musí byť G=9 a potom je B=0. Teda G=B+9, čo sa z cifier dá vyrobiť len ak G=9 a B=0. Lenže my sme už povedali, že D=0. Ak by teda bolo D=0, museli by sa D a B rovnať, čo zadanie zakazuje. Preto vieme, že D≠0.

Ešte je tu ale možnosť, že D + zvyšok zo sčítania v ráde stoviek spôsobí prechod cez desiatku. V ráde stoviek to vyzerá nasledovne: 1+E+H=J. Zaujíma nás hlavne, či môžeme prejsť cez desiatku, prípadne či sa nám to podarí aj viackrát. 1+E+H môže byť najviac 1+9+8=18. To značí, že prejdeme cez desiatku najviac raz. Mohli by sme teoreticky aj dvakrát, ak by sme v ráde desiatok zostal zvyšok 2. Pozorný čitateľ ale rýchlo vyskúša, ako by sa taký zvyšok zo zostávajúcich cifier dal vyrobiť a zistí, že v takom prípade nám nesedí sčítanie v ráde desiatok. Preto vieme, že zvyšok zo sčítania v ráde stoviek je 1. Platí teda D+1=10, odkiaľ **D=9**.

To však znamená, že v ráde tisícok sme prešli cez desiatku raz. V ráde desaťtisícok teda máme 1+A+G, čiže 2+G. Tento súčet musí byť viac aspoň 10. Vidíme teda, že G musí byť aspoň 8, keďže už D=9, **G=8**. Z toho rovno vyplýva, že **B=0**, aby platilo sčítanie v ráde desaťtisícok.

			1	**0**	C
	1	**9**	E	F	F
	8	F	H	F	I
1	**0**	F	J	H	F

Keď sa pozrieme na rád jednotiek, vidíme, že C+F+I je súčet končiaci cifrou F. Keďže C+I je určite viac ako 0, musí byť C+I násobok 10, a keďže najvyššia možná hodnota tohto súčtu je (aj keby sa cifry mohli opakovať) 9+9=18, platí C+I=10. Na výber máme ešte cifry 7, 6, 5, 4, 3 a 2. C a I teda budú nahradené buď 7 a 3 alebo 6 a 4 (v ľubovoľnom poradí).

V ráde desiatok platí kvôli predošlému prechodu cez desiatku, že 1+0+2F končí cifrou H. Poďme sa preto pozrieť na to, aká cifra môže byť F.

Ak je F=7, potom 1+2F=15, teda H=5. Rovnako už vieme povedať, že C a I budú v nejakom poradí číslice 6 a 4 (druhú dvojicu sme vylúčili tým, že F=7). Pre E a J nám teda zostali cifry 2 a 3, no v akomkoľvek poradí ich do príkladu doplníme, úloha nám sedieť nebude. Teda F≠7.
Ak F=6, potom 1+2F=13, odkiaľ H=3. To je ale problém, pretože už pre C a I nemôžeme použiť ani 6 a 4, ani 7 a 3. Nemáme teda čo doplniť za C respektíve I, a teda F≠6.
Ak F=5, potom 1+2F=11. Teda H=1, no my už vieme, že A=1. A keďže rôzne písmená majú byť rôzne cifry, F≠5.
Ak F=4, potom 1+2F=9. Teda H=9, ale už D=9. Preto F≠4.
Ak F=3, potom 1+2F=7. H=7, C a I musia teda byť v nejakom poradí číslice 6 a 4. Pre E a J nám zostali číslice 2 a 5, no akokoľvek ich doplníme do príkladu, úloha nám sedieť nebude. Teda F≠7.

To znamená, že nutne platí **F=2**. Potom 1+2F=**H=5**. Zostáva nám doplniť číslice 3, 4, 6 a 7 za písmená C, E, H a I. Vieme, že pre C a I si musíme vybrať jednu z dvojíc 7 a 3 alebo 6 a 4.

Ak C=7 a I=3 (respektíve naopak), potom pre rád stoviek platí 1+E+5=J+10 – vieme, že v tomto sčítaní musíme prejsť cez desiatku. Teda E=J+4. Ale nám pre E a J zostali už len 4 a 6 – z týchto správne riešenie nevyskladáme. Avšak ak **C=6 a I=4 (respektíve naopak)**, potom rovnicu E=J+4 vieme za pomoci čísel 7 a 3 vyriešiť jednoducho: **E=7** a **J=3**. Keďže sú dve možnosti, ako doplniť číslice za C a I, **úloha má dve riešenia a to** (v tvare ABCDEFGHIJ) **1049728563** a **1069728543**.

Bodovanie:
za odôvodnenie, že A=1 – 1b.; za odôvodnenie, že D=9 – 1,5b.; za odôvodnenie, že G=8 a B=0 – 0,5b.; za odôvodnenie, že F=2 a H=5 – 1b.; za doplnenie ostatných písmen – 1b.