Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

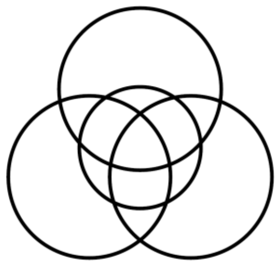
PIKOMAT

36. ročník www.pikomat.sk školský rok 2018/2019

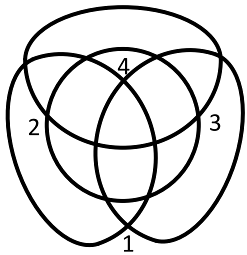
Vzorové riešenia 4. série, kategória 5–7

Úloha M1: Kanály – *Opravoval Martin „Panda“ Svetlík*

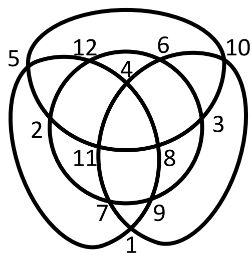
Kanály zakreslené do mapy vytvárali skupinu štyroch kružníc, kde sa každá s každou pretínala práve na dvoch miestach ako na obrázku. V žiadnom priesečníku sa nepretínali viac ako dve kružnice. Týmto vzniklo dvanásť priesečníkov – križovatiek. Kristián chcel doplniť čísla od jedna po dvanásť, na každú križovatku práve jedno, tak, aby bol súčet čísel na každej kružnici rovnaký. **Ako sa dali čísla rozmiestniť?** Poznámka: V tejto úlohe stačí popísať len jedno možné riešenie.



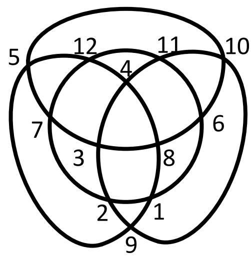
V tejto úlohe stačilo nájsť jedno riešenie – nie je potrebné nájsť všetky (a dokázať, že ďalšie už neexistujú), ani zrátať koľko ich dokopy je. Napriek tomu, ako vždy v Pikomate, je treba napísať nejaký postup, nejaké úvahy, ako sme na to riešenie prišli.



Celkom jednoducho to išlo vyriešiť napríklad tak, že sme si uvedomili, že každé dve kružnice sa pretínajú v dvoch bodoch – a oba tieto priesečníky sa zarátajú do súčtu oboch kružníc. Potom môžeme spraviť to, že na priesečník jednej dvojice kružníc dáme nejaké dve čísla, a na priesečník druhej dvojice iné dve čísla, ktoré majú rovnaký súčet. Napríklad ako na prvom obrázku (aby sme ušetrili trochu papiera, tie vytŕčajúce časti kružníc si sploštíme ☺, priesečníky sa nám zachovali) – pravá a ľavá kružnica sa pretínajú na priesečníkoch s číslami 1 a 4, horná a vnútorná s číslami 2 a 3. Zatiaľ je teda na každej kružnici súčet 5. Môžeme takto pokračovať aj s dvojicami pravá+horná (5+8=13) a ľavá+vnútorná (6+7=13), a potom s dvojicami pravá+vnútorná (9+12=21) a ľavá+horná (10+11=21). Takto bude na každej kružnici súčet 5+13+21=39 (druhý obrázok).



Veľmi podobný postup, ešte využívajúci jednu vec navyše – tie dvojice, ktoré dáme na priesečníky dvoch kružníc, môžu mať všetky rovnaké súčty. A to vtedy, keď zoberieme jedno číslo od začiatku a jedno od konca – 1+12 = 2+11 = 3+10 = 4+9 = 5+8 = 6+7. Máme teda 6 dvojíc, a každú dáme na dvojicu priesečníkov dvoch kružníc.



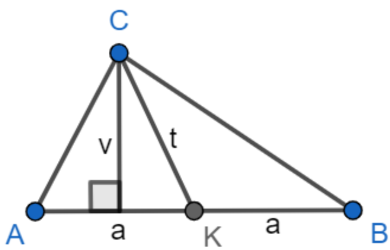
Na každej kružnici takto skončia tri dvojice, a teda súčet na každej bude 3·13=39, napr. ako na treťom obrázku.

To, že nám vyšiel v oboch prípadoch súčet 39, vôbec nie je náhoda. Mnohí z Vás začali svoje riešenie tým, že si určili, že tento súčet musí byť 39. Prečo je to tak? Každé číslo od 1 po 12 je zarátané práve v dvoch súčtoch (dvoch kružniciach). Preto súčet všetkých súčtov bude 2×(1+2+...+12) = 156. Keďže je to súčet 4 kružníc, ktoré majú mať rovnaké súčty, tak každá musí mať súčet 156/4 = 39. Táto úvaha je správna (a použijete ju aj v kope ďalších úloh a pomôže Vám), a tiež ste za ňu nejaký ten bodík dostali. No mnohí z Vás potom napísali „a teraz som skúšal rôzne čísla so súčtom 39, až mi to vyšlo, tu je jedno rozmiestnenie.“ Toto bohužiaľ nestačí, a bolo by treba popísať aj nejaké myšlienky, čo ste skúšali a ako ste pri tom rozmýšľali. Niekoľko ľudí aj tento svoj proces popísalo na 5 bodov. Tí, ktorí len povedali, že potom skúšali, dostali väčšinou 3 - 3,5 boda.

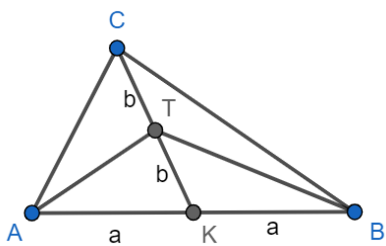
Bodovanie:
za iba nákres jedného riešenia – 2b.; za úvahy, ako ste naň prišli – 3b.

Úloha M2: Útes – *Opravovali Peter „Comp“ Ambrož a Terézia „Tete“ Gurová*
Keby sa chlapci pozreli na útes zhora, mal by tvar trojuholníka *ABC*. Mohli by ho vyvážiť, ak by sa Kristián postavil na bod *K* ležiaci na úsečke *AB* a Tom by sa postavil na bod *T* ležiaci niekde vnútri trojuholníka *ABC*. Útes by bol vyvážený, ak by úsečky *KT*, *AT*, *BT* a *CT* rozdelili trojuholník na štyri trojuholníky s rovnakým obsahom. **Kde mohli byť body *K* a *T*?** Poznámka: V tejto úlohe stačí popísať len jedno možné riešenie.

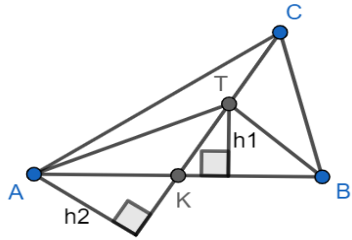
Ako prvý si pozrieme jednoduchší spôsob, ktorý nájde správne riešenie, ale nedokazuje, že je jediné možné (čo však nevadí, podľa zadania stačilo napísať hocijaké správne riešenie). Používajú sa pri ňom ťažnice, čiže spojnice vrcholov so stredmi protiľahlých strán. Majú takú peknú vlastnosť, že rozdeľujú trojuholník na dva menšie s rovnakým obsahom. Obsah trojuholníka sa počíta $S = (a \cdot v)/2$. Základne týchto menších trojuholníkov sú z definície rovnako dlhé a výšky tiež, pretože pri oboch je výška kolmicou z vrcholu C priamkou prechádzajúcou bodmi A, K a B



Keďže bod K musí byť na strane AB, robíme si ťažnicu z vrcholu C na AB a priesečník so stranou AB označíme K. Tak nám vznikli dva trojuholníky AKC a BKC, ktoré majú rovnaký obsah a to je polovica obsahu trojuholníka ABC. Následne spravíme ťažnicu v trojuholníku AKC z bodu A do stredu strany KC a pre trojuholník BKC z bodu B tiež do stredu strany KC. Toto nám rozdelilo oba trojuholníky AKC a BKC na dva s polovičným obsahom, čiže máme štyri trojuholníky s rovnakým obsahom. Stred strany KC si teda označíme T a úlohu máme vyriešenú.



Druhý spôsob riešenia je podobný, dá sa ním však aj dokázať, prečo je toto riešenie jediné možné. Keď si rozdelíme trojuholník úsečkami KT, AT, BT a CT, vzniknú nám trojuholníky AKT, BKT, BCT a ACT. Ako prvé si treba všimnúť, že hocikam umiestnime bod T, vždy budú mať trojuholníky AKT a BKT rovnakú výšku - kolmicu z bodu T na priamku prechádzajúcu bodmi A, K a B. Ak teda majú mať trojuholníky AKT a BKT rovnakú výšku aj obsah, musia mať aj rovnakú dĺžku základne. To znamená, že AK = BK, a keďže bod K leží na úsečke AB, musí byť v jej strede.



Ďalej ideme hľadať bod T. Všimneme si, že trojuholníky AKC a BKC majú oba obsah ½ obsahu ABC, pretože majú rovnakú výšku z C na úsečku AB a aj dĺžku základne. Keďže majú všetky trojuholníky rovnaký obsah, obsah trojuholníkov $S_{AKT} + S_{ACT} = S_{BKT} + S_{BCT} = ½\, S_{ABC}$. Keď spojíme tieto trojuholníky, vzniknú nám štvoruholníky AKTC a BKTC. Keďže trojuholníky AKC a BKC majú obsah rovný ½ obsahu ABC tak isto ako AKTC a BKTC, musia byť AKC a AKTC rovnako aj ako BKC a BKTC navzájom totožné. To znamená, že bod T musí byť niekde na úsečke KC. Keďže trojuholníky AKT a ACT majú rovnakú výšku z vrcholu A a rovnaký obsah, musia mať aj základňu rovnakú. To znamená, že bod T musí byť v strede úsečky KC.

Bodovanie:

Trochu netradične sme bodovanie tejto úlohy založili na strhávaní bodov za nedostatočne vysvetlené alebo chybné riešenia. Za postup len pre rovnostranný alebo rovnoramenný trojuholník ste mohli stratiť 1b. Ďalšieho 0,5 b. sa dalo stratiť, keď ste nenapísali odpoveď. Za nedostatočné objasnenie, prečo ťažnica rozdeľuje trojuholník na dva trojuholníky s rovnakým obsahom ste mohli stratiť 1b., ak toto objasnenie chýbalo, prišli ste o ďalší 1b. Pokiaľ Vaša argumentácia bola chybná alebo nejasná, mohli ste prísť o ďalší 1b. Napokon, za drobné chyby sme strhávali 0,3b. – 0,5b.

Úloha M3: Delenie – *Opravovala Ľudmila Šimková*

Liliputánov bolo šesť. Každý z nich mal medzi ostatnými aspoň troch kamarátov. Kamarátstvo medzi liliputánmi bolo vždy vzájomné. Liliputáni sa chceli rozdeliť do dvoch skupín, ktoré nemuseli byť rovnako veľké. **Dokážu sa liliputáni rozdeliť do dvoch skupín tak, aby mal každý v svojej skupine *určite* aspoň jedného kamaráta?**

Zoberme dvoch Liliputánov, ktorí sa kamarátia a vytvorme z nich 1. skupinu. Každý v nej tak má aspoň jedného kamaráta. Ukážme, že ak zo zvyšných štyroch Liliputánov vytvoríme 2. skupinu, bude v nej mať každý aspoň jedného kamaráta. Každý Lilipután má aspoň troch kamarátov a v 1. skupine sú len dvaja Liliputáni. Každý z druhej skupiny tak môže mať v prvej skupine najviac dvoch kamarátov. Tým pádom vo svojej skupine musí mať aspoň jedného ďalšieho kamaráta, aby ich dokopy mal aspoň troch.

Liliputánov teda rozdelíme do dvoch skupín tak, že do jednej dáme dvoch, čo sa kamarátia a do druhej všetkých ostatných. Každý Lilipután tak bude mať vo svojej skupine aspoň jedného kamaráta.

Vysvetlíme si ešte zopár vecí, ktoré niektorým z Vás robili ťažkosti.

Ak sa Liliputáni náhodne rozdelia, môže sa stať, že niekto nemá vo svojej skupine žiadneho kamaráta. Avšak oni vedia, kto sa s kým kamaráti a rozdeľujú sa podľa toho, nie náhodne. Ak teda nájdeme rozdelenie, v ktorom niektorý Lilipután nemá vo svojej skupine žiadneho kamaráta, ešte neznamená, že sa tak nevedia rozdeliť. Stále môže existovať rozdelenie, v ktorom je splnená podmienka. Nám stačí nájsť jedno také rozdelenie.

Avšak, musíme vedieť ukázať, že sa tak vedia rozdeliť pre všetky možnosti toho, ako sa môžu kamarátiť. Nestačí to ukázať pre jeden konkrétny príklad kamarátstiev.

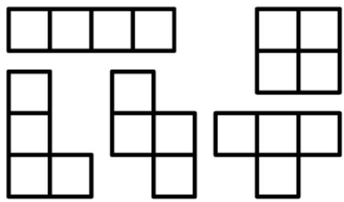
Zadanie nevraví, že skupiny musia byť rovnako veľké, môžeme ich teda rozdeliť aj na 2 a 4. Čo keby museli byť rovnako veľké? Prezradím Vám, že sa stále dajú rozdeliť tak aby bola splnená podmienka. Je to trošičku ťažšie, ako riešenie, ktoré sme si tu ukázali, no vy ho určite nájdete. Skúste si to :). No pre úplné vyriešenie ste vôbec nemuseli rozoberať skupinky 3 a 3, ak ste mali správne riešenie pre 2 a 4.

Bodovanie:
za rozdelenie Liliputánov do skupín po 2 a 4 s vysvetlením – 3b.; za dôkaz, že v skupine 4 liliputánov má každý aspoň jedného kamaráta – 2b.

Poznámka:
Za rozdelenie pre konkrétne zvolené kamarátstva medzi Liliputánmi (ak ste neuvažovali nad inými možnosťami) ste mohli získať najviac 1 bod.

Úloha M4: Zakrytá šachovnica – *Opravoval Michal „Kesy“ Kesely*

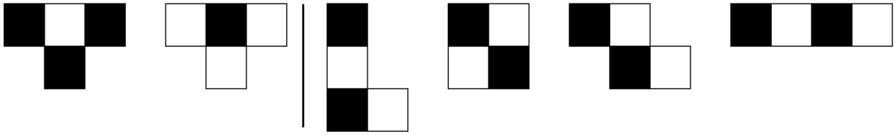
Hra sa hrala na šachovnici veľkosti 6 × 6 políčok. Dvaja hráči na ňu striedavo ukladajú hracie dieliky. Na obrázku je päť typov dielikov, ktoré majú hráči k dispozícii, z každého hocikoľko kusov. Keď je hráč na ťahu, vyberie si niektorý kúsok a položí ho na voľnú časť šachovnice. Hra končí, keď niektorý z hráčov nemá na šachovnici dosť miesta na položenie žiadneho dieliku. Zvíťazí ten hráč, ktorý svojimi dielikmi zakryl viac čiernych políčok. Ak obaja hráči zakryli rovnako veľa čiernych políčok, nastáva remíza. **Vie niektorý z hráčov hrať tak, že *nikdy* neprehrá?**



Úloha od nás požaduje, aby sme zistili, či existuje pre niektorého z hráčov stratégia taká, že nikdy neprehrá. A samozrejme, chceme túto stratégiu nájsť a popísať. Musíme nájsť inštrukcie pre jedného z hráčov také, aby zabránil druhému hráčovi vyhrať bez ohľadu na to, ako dobre bude ten druhý hráč hrať.

Nebudem Vás napínať, prvý hráč vie hrať tak, aby *neprehral*. Pre fajnšmekrov si potom nad rámec zadania ukážeme, ako by mal prvý hráč hrať tak, aby dokonca vždy *vyhral*.

Poďme sa pozrieť na použiteľné dieliky. Všimnime si, že jediný z dielikov - ten, ktorý vyzerá ako T - vieme na šachovnicu položiť tak, aby zakrýval 3 čierne políčka (prípadne naopak, práve jedno čierne políčko). Všetky ostatné dieliky vždy pokryjú práve 2 čierne políčka na šachovnici (viď obrázok na ďalšej strane).



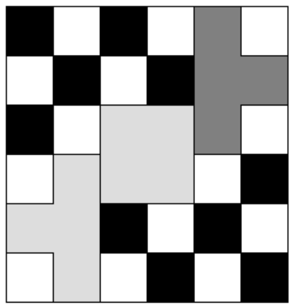
Preto sa zdá byť výhodné, aby prvý hráč začal položením tohto T na tri čierne políčka. Súper má teraz v podstate len dve možnosti - buď tiež položí T na tri čierne políčka alebo spraví niečo iné. V prvom prípade vyrovná stav partie, v druhom prípade začína prehrávať. Nikdy však nevie prvého hráča v počte bodov predbehnúť. A to dokonca neplatí len pre prvý ťah, ale všeobecne - ak prvý hráč zahrá to najlepšie, čo v danom ťahu môže (v prvom ťahu je to T na tri čierne políčka), tak ho súper jednoducho nemôže predstihnúť.

Preto stratégia prvého hráča je nasledovná. Ak sa na plochu dá položiť T na tri čierne políčka, spraví to. Ak to už nejde, tak spraví niektorý z ťahov, ktorý zakryje 2 čierne políčka. Ak ani to už nejde, položí T na jedno čierne políčko. A ak ani to už nejde, partia je na konci. Súper nemôže mať na konci viac bodov ako prvý hráč, pretože má maximálne toľko ťahov ako prvý hráč (pri zhode okolností môže mať dokonca prvý hráč o ťah navyše) a v každom ťahu vie uhrať najviac toľko bodov ako prvý hráč (ak by mal druhý hráč lepší ťah, tak prvý hráč musel pred ním zahrať zlý ťah v rozpore so svojou stratégiou). A keďže súper nemá viac bodov ako prvý hráč, tak prvý hráč prinajhoršom remizuje.

Skúste sa mimochodom zamyslieť nad týmito otázkami. Záleží na tom, že šachovnica má rozmery 6x6? Záleží vôbec na tom, že šachovnica je štvorec? A záleží na tom, ako vyzerajú dieliky, ktoré vieme použiť?

Teraz si ešte ukážeme, že prvý hráč môže dokonca vždy vyhrať. Toto už úloha nežiadala, takže extra body za to neboli, ale pekne to ukazuje, ako môže taká klasická stratégia prvého hráča vyzerať.

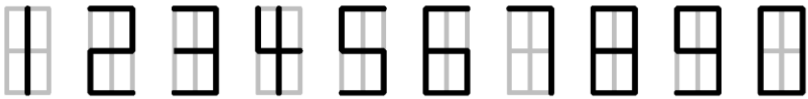
V prvom ťahu, trochu prekvapivo, prvý hráč uloží štvorec do stredu šachovnice. Tým síce získa len 2 body, ale dosiahne to, že potom už môže opakovať ťahy súpera, a to na opačnej strane šachovnice (múdro tomu hovoríme "stredovo súmerne"). Partia potom bude mať nepárny počet ťahov, čiže prvý hráč bude mať o ťah navyše. A keďže prvý hráč vie opakovať ťahy súpera z minulého kola (ibaže súmerne okolo stredu), získa v nich samozrejme také isté množstvo bodov ako súper v minulom kole. Okrem toho ale ešte má 2 body z prvého ťahu. O tieto 2 body potom celú partiu vyhrá.



Bodovanie:
za určenie správneho hráča – 1b.; za uvedomenie si vlastností dielika T – 1b.; za kvalitu argumentácie – 3b.; tí, čo ste našli víťaznú stratégiu pre fajnšmekrov, tak pred Vami snímam pomyselný klobúk a tlieskam.

Úloha M5: Dobré časy – *Opravovala Karolína Pisoňová*

Deti pozorovali digitálne hodiny, ktoré ukazovali hodiny a minúty. Ich cifry sú na obrázku. Keď sa pozerali na odraz hodín v zrkadle (podľa zvislej osi), niekedy bol odraz tiež platný čas. Napríklad čas 15:15 toto spĺňa, lebo má odraz 21:21, ktorý je platný čas. Ale napríklad časy 18:18 a 11:13 toto nespĺňajú, lebo 81:81 nie je platný čas a odraz 11:13 obsahuje zrkadlovú trojku, ktorá nie je žiadna cifra. **Koľko existuje časov, ktorých odraz je tiež platný čas?**



Ako prvé si ujasnime, kam a ako sa nám zobrazia jednotlivé cifry v odraze zrkadla:

8 0 : 8 5 → 2 8 : 0 8

Cifra z prvej pozície sa zobrazí na štvrtú, z druhej na tretiu, z tretej na druhú a zo štvrtej pozície na prvú. Okrem toho nemôžeme zabudnúť, že sa zobrazia zrkadlovo otočené, čo napríklad pri cifrách 0 a 8 nič nemení, ale napríklad cifra 5 sa zmení na cifru 2.

Keďže chceme zistiť, ktoré časy budú platné aj v odraze, tak sa poďme najskôr pozrieť na to, ktoré cifry sa zrkadlovo zobrazia tiež na platné cifry. Vidíme, že **takýchto cifier je iba päť: 0, 1, 2, 5 a 8**. Z toho cifry 0, 1 a 8 sa zobrazia v odraze rovnako ale cifra 2 sa zmení na cifru 5 a cifra 5 zas na cifru 2. Časy, ktoré obsahujú aj iné cifry nás už nemusia zaujímať, pretože ich odraz by určite nebol platným časom.

Keďže najvyšší počet hodín, ktorý hodiny zobrazujú je 23 a najvyšší počet minút je 59, hneď vidíme, že cifry 5 a 8 sa nikdy nebudú nachádzať na niektorých pozíciách. Skúsme najskôr, na ktorých miestach sa môže nachádzať cifra 8, aby bol platný aj skutočný aj odrazený čas.

Cifra 8 sa nikdy nebude nachádzať na mieste desiatok hodín ani desiatok minút skutočného času kvôli tomu, že hodín ani minút nie je až 80 (neexistuje taký platný čas). Ak by ale cifra 8 bola na mieste jednotiek minút, tak by sa v odraze zobrazila na miesto desiatok hodín, a ak by bola na mieste jednotiek hodín, tak by sa zas zobrazila na miesto desiatok minút, teda v oboch prípadoch by bol vzniknutý odrazený čas neplatný. Z toho sme zistili, že **cifra 8 nemôže byť na žiadnom mieste**. Stačí nám už overiť iba tie časy, ktoré obsahujú iba cifry 0, 1, 2 a 5.

Poďme sa pozrieť na to, aké cifry môžu byť na jednotlivých pozíciách času:

Na mieste desiatok hodín, aby sme dostali skutočný čas, môžu byť iba cifry **0, 1 a 2**, lebo hodín je iba 23. Tieto cifry sa zobrazia v odraze na miesto jednotiek minút ako cifry 0, 1 a 5, ktoré v odrazenom čase budú platné.

Na mieste jednotiek hodín môžu byť všetky štyri cifry (**0, 1, 2, 5**). Tieto cifry sa zobrazia v odraze na miesto desiatok minút ako cifry 0, 1, 5, 2, čo na mieste desiatok minút nevadí, keďže minút je až 59 a teda budú platné aj v odrazenom čase.

Na mieste desiatok minút znovu môžu byť všetky štyri cifry (**0, 1, 2, 5**), aby sme dostali skutočný čas, keďže ich je až 59, ale v odraze sa zobrazia na miesto jednotiek hodín.

Na mieste jednotiek minút, aby sme dostali skutočný čas, môžu byť zas všetky 4 cifry, ale tie sa zobrazia na miesto desiatok hodín. Na tom mieste už vieme, že nemôže byť cifra 5, čo znamená, že v skutočnom čase nemôže byť na mieste jednotiek minút cifra 2. Môžu tu teda byť len cifry **0, 1 a 5**.

Vypíšme si, ktoré hodiny môžu vzniknúť z cifier, ktoré sme si určili, že môžu byť na mieste jednotiek a desiatok hodín: 00, 01, 02, 05, 10, 11, 12, 15, 20, 21, 22, 25. Tu je ale problém, lebo hodín je iba 23 a nie 25, ale okrem 25 ostatné časy sedia. Žiaden z nich sa ani nezobrazí v odraze ako viac než 59 minút, takže **na hodiny máme 11 platných možností**.

Vypíšme si aj to, ktoré minúty môžu vzniknúť z cifier, ktoré môžu byť na mieste jednotiek a desiatok minút: 00, 01, 05, 10, 11, 15, 20, 21, 25, 50, 51, 55. Všetky z nich sú platné ako minúty, keďže sú menšie ako 59. Už iba overiť, či po zobrazení v odraze budú dávať tieto minúty aj platné hodiny. Rýchlo overíme, že jedine 25 minút je problémových, pretože tie sa zobrazia v odraze ako 25 hodín, čo je priveľa. Takže **na mieste minút máme tiež 11 možností** minút platných aj v odraze.

Platné časy teraz vieme vytvoriť spojením hociktorej z týchto možností na hodiny a hociktorej možnosti na minúty, čo je $11 \cdot 11 =$ **121 časov** platných aj v odraze.

Bodovanie:
za vylúčenie cifier 3, 4, 6, 7 a 9 – 1b.; za vysvetlenie, prečo 8 nemôže byť na žiadnom mieste – 1b.; za vysvetlenie a vylúčenie aj zvyšných nesprávnych možností (časy s dvojkou na mieste jednotiek, 25 hodín a 25 minút) – 2b.; za správne dopočítanie výsledku – 1b.