Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

31. ročník www.pikomat.sk školský rok 2013/2014

Vzorové riešenia 1. série letnej časti, kategória 8–9

Úloha S1: Stavebnica. *Opravovala Diana „Dee“ Odrobináková.*

Prvá vec, ktorú si bolo treba v tejto úlohe uvedomiť, bola, ako sa dá pomocou vekov bratrancov zapísať počet nálepiek na stavebnici. Najstaršieho bratranca označíme A, stredného B a najmladšieho C. Počet nálepiek označme N. Potom už len postupne pozorne čítame zadanie a zapisujeme, že:

$$N = (A + B + C) \cdot (A - B) \cdot (B - C) \cdot (A - C).$$

Otázka znie, či sa Timovi podarí nálepky rozdeliť na tri rovnaké kôpky. V matematickej reči to znamená, že máme zistiť, či je počet nálepiek N deliteľný číslom 3. Deliteľnosť tromi bude zabezpečená vtedy, ak aspoň jedna z uvedených zátvoriek bude deliteľná 3.

A ako zistíme, či je aspoň jedna zo zátvoriek deliteľná 3? Najprv sa trochu zamyslime nad deliteľnosťou. Každé číslo dáva po delení tromi jeden zo zvyškov: 0, 1, alebo 2. Keď od seba dve čísla odčítame, odčítajú sa aj ich zvyšky po delení tromi. Napríklad ak číslo A dáva zvyšok 2 a číslo B dáva zvyšok 1, tak potom číslo $(A - B)$ bude dávať zvyšok $2 - 1 = 1$. Alebo iný, pre nás zaujímavejší príklad: ak majú dve čísla *rovnaký* zvyšok po delení tromi, potom keď ich od seba odčítame, odčítajú sa aj rovnaké zvyšky a dostaneme číslo, ktoré po delení tromi dáva zvyšok 0. No a zvyšok nula znamená, že číslo je deliteľné tromi.

Teraz sa vráťme k bratrancom a všimnime si, že v tom násobení zátvoriek sú zastúpené *všetky dvojice*, ktoré sa od seba dajú odčítať: $(A - B) \cdot (B - C) \cdot (A - C)$. Takže ak by ktorákoľvek dvojica bratrancov mala také veky, že dávajú rovnaký zvyšok po delení tromi, potom „ich zátvorka“ určite bude dávať zvyšok 0, a teda bude deliteľná tromi. Krajšie povedané: **ak veky ktorýchkoľvek dvoch bratrancov dávajú po delení tromi *rovnaký* zvyšok, potom je určite N deliteľné tromi**.

To je super, pomaly začíname veriť, že N naozaj bude deliteľné 3. Jediné, čo by nám toto nadšenie ešte možno mohlo pokaziť, je prípad, kedy žiadni dvaja bratranci nedávajú rovnaký zvyšok. Čiže prípad, kedy všetci bratranci dávajú rôzne zvyšky po delení tromi. Čo s tým? Tu nám prichádza na pomoc prvá zátvorka: $(A + B + C)$. Ak dávajú všetci rôzne zvyšky, musia to byť zvyšky 0, 1 a 2. No a keď sčítame všetkých troch dokopy, sčítajú sa aj tieto zvyšky a dostaneme zvyšok po delení tromi rovný 3. A to je vlastne to isté, ako zvyšok 0. Takže ak budú mať všetci traja rôzne zvyšky po delení tromi, potom prvá zátvorka bude mať zvyšok nula, a teda bude deliteľná tromi. Prišli sme na to, že **ak všetci bratranci dávajú po delení tromi *rôzne* zvyšky, potom je určite N deliteľné tromi**.

Hurá, číslo *N* je deliteľné tromi aj vtedy, keď sú všetky zvyšky rôzne, a aj vtedy, keď sú niektoré dva zvyšky rovnaké. Žiaden iný prípad nemôže nastať, a preto môžeme spokojne prehlásiť, že **Timovi sa určite podarí nálepky rozdeliť tak, aby na každej z troch kôpok bol rovnaký počet nálepiek**.

Bodovanie:
správna odpoveď – 2b.; vysvetlenie postupu – 3b.

Úloha S2: Šetrič obrazovky. *Opravoval Pavol „Tamarka" Hronský.*

Mravec sa po bludisku môže pohybovať iba smerom dole a doprava. To nám dáva možnosť z bludiska vylúčiť niektoré políčka a úlohu si tým málinko zjednodušiť. Prečo môžeme políčka vylúčiť, ignorovať? Pretože buď sa z nich nijakým spôsobom nedá dostať do cieľa, alebo k nim mravec ani nevie prísť. Tieto políčka vyfarbíme sivou farbou ďalej sa nimi nemusíme zaoberať.

V zadaní sa pýtame, koľkými cestami sa vie mravec dostať z vchodu do východu. Zaznačme si teda do každého políčka *počet ciest*, ktorými sa vie mravec na toto políčko dostať. Na celkom prvé políčko – vchod – sa pochopiteľne vie dostať jediným spôsobom, pretože tam začína. Ako však určíme čísla na ostatných políčkach?

Predstavme si zmenšené bludisko, ktoré ma rozmery 2×2. Riadky si označíme číslami 1 a 2, stĺpce si označíme písmenami A a B, ako na obrázkoch. Začíname na políčku A1 (Obr. 1). Z neho sa vieme pohnúť na B1 jednou cestou, rovnako tak na A2 jednou cestou (Obr. 2). Koľkými cestami sa vieme dostať na políčko B2? Vieme sa tam dostať z A2, ale aj z B1, a teda počet ciest, ktorými sa vieme dostať na B2 = A2+B1 = 1+1 = 2. Ak toto malé ukážkové bludisko zovšeobecníme, tak sme zistili, že **počet cestičiek vedúcich na ktorékoľvek políčko je vlastne počet cestičiek vedúcich na políčko nad ním a vľavo od neho**.

	A	B
1	**1**	
2		

Obr. 1

	A	B
1	**1**	**1**
2	**1**	

Obr. 2

	A	B
1	**1**	**1**
2	**1**	**1+1=2**

Obr. 3

Teraz už stačí tento „návod" použiť na celé bludisko. Dostaneme výsledok ako na obrázku. **Rôznych cestičiek z vchodu do východu existuje 119.**

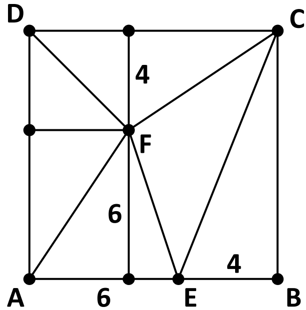
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1		1	2		1				1					1
1		1	3		1	1			1					1
1	1	2	5			1			1					1
1	2		5			1			1					1
1	3	3	8	8	8	9	9	9	10	10	10	10	10	11
					8	17	26		10				10	21
							26	26	36					21
							26		36	36	36	36	36	57
							26		36					57
							26	26	62					57
									62	62	62	62	62	119

Bodovanie:
za nesprávny výsledok, ale so správnym postupom, som strhával max. 2b.; za správny výsledok, ale nedôsledne okomentovaný postup, som strhával max 3b.

Úloha S3: Stopy na ľade. *Opravoval Roman Kluvanec.*

V tejto úlohe bolo asi najjednoduchšie najprv si vypočítať, aký má byť obsah každého trojuholníka. Obsah štvorca so stranou dlhou 10m bude samozrejme $10 \cdot 10 = 100\text{m}^2$. Ak doň chceme dostať 5 trojuholníkov, každý s rovnakým obsahom, je jasné, že každý trojuholník musí mať obsah $100/5 = 20\text{m}^2$.

Pozrime sa najskôr na trojuholník *EBC*. Vieme, že $|BC| = 10$m. Ďalej strana EB je zároveň aj výškou na stranu BC, a tak jej dĺžku vieme jednoducho vypočítať pomocou vzťahu na obsah trojuholníka:



$$S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{|BC| \cdot |EB|}{2}, \text{ takže } |EB| = \frac{2 \cdot S}{|BC|} = \frac{40}{10} = 4\text{m}.$$

Potom vieme rovno dopočítať aj dĺžku $|AE|$, keďže je to len zvyšok 10m dlhej strany $|AB|$. Čiže $|AE| = |AB| - |EB| = 10 - 4 = 6$m. Ďalej si všimnime trojuholník *DFC*. Ten má taktiež podstavu dĺžky 10m, a teda aj jeho výška bude 4m. Z toho hneď vidíme, že výška trojuholníka *AEF* bude 6m, lebo je to zas len doplnkom do 10m, ktoré má celý štvorec.

Keď sa však pokúsime vypočítať obsah trojuhoníka *AEF*, zistíme strašnú vec:

$$S = \frac{|AE| \cdot v_{AE}}{2} = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18\text{m}^2.$$

Takže ak sme predpokladali, že všetky trojuholníky majú rovnaký obsah (20m^2), samými nevyhnutnými krokmi sme dospeli k tomu, že jeden trojuholník má obsah 18m^2. To je spor, ktorý nevyhnutne znamená, že náš predpoklad bol nesprávny, a teda že **všetkých päť trojuholníkov nikdy nemôže mať rovnaký obsah.**

Bodovanie:
určenie obsahu jedného trojuholníka 20m^2 – 1b.; akýkoľvek správny dôkaz, prečo trojuholníky nikdy nemôžu mať všetky rovnaký obsah – 4b.

Úloha S4: Nákresy na tabuli. *Opravovala Michaela „Miški“ Zatrochová.*

Základom bolo uvedomiť si, že ide o trojuholník, a teda musíme vychádzať z trojuholníkovej nerovnosti: súčet ľubovoľných dvoch strán trojuholníka je väčší ako jeho tretia strana.

Vieme, že strany trojuholníka sú: *CAFDG*, *ABACDE* a *CHHBAED*. Vidíme, že jedno číslo je 5-ciferné, druhé je 6-ciferné a tretie je 7-ciferné. No a podľa trojuholníkovej nerovnosti musí platiť, že aj keď sčítame tie dve najkratšie strany, výsledok stále musí byť väčší ako dĺžka najdlhšej strany. Ideme teda sčitovať ako na Obr. 1 a vieme len to, že výsledok musí byť väčší ako *CHHBAED*.

	A	B	A	C	D	E
	+	C	A	F	D	G
?	?	?	?	?	?	?
(C	H	H	B	A	E	D)

Obr. 1

Vidíme, že posledné sčitovanie bude „*A plus nič*“. Aby sme sa vôbec dostali až na sedemciferné číslo, nutne to znamená, že ***A* = 9** a že k tomu ešte bude treba preniesť 1 z predošlého sčitovania. Takže výsledok posledného sčitovania určite bude 10, a teda musí platiť, že ***C* = 1** a ***H* = 0**. Žiadne väčšie cifry jednoducho zo sčitovania „*A plus nič*“ nemôžeme dostať.

A tak sme sa dozvedeli, že predchádzajúce sčitovanie „*B plus C*“ je vlastne „*B plus 1*“. Okrem toho potrebujeme aj z tohto sčitovania preniesť jednotku, lebo sme to sľúbili v predošlom odseku. Lenže aj keď za *B* dosadíme najväčšiu možnú cifru 8 (9 už je použitá pre *A*), stále je výsledok iba 8+1=9. Takže aj tu sa musíme spoľahnúť, že z predošlého sčitovania bude prenesená 1. Každopádne *B* musí ostať ***B* = 8**.

Predošlý stĺpec je „*A plus A*“, čiže „*9 plus 9*“. To je fajn, o sľúbené prenášanie jednotky je teda postarané. A výsledok bude buď 18, alebo 19 – podľa toho, či bude prenesená jednotka z predošlého sčitovania „*C plus F*“. A vlastne hneď aj vidíme, že nebude, pretože *C* = 1 a pre *F* je už voľná nanajvýš tak sedmička. To je málo na to, aby sa konalo nejaké prenášanie, takže výsledok „*A plus A*“ určite bude 18.

Doteraz zistené informácie vidíme na Obr. 2. Sčitovanie „*C plus F*“, teda vlastne „*1 plus F*“, má teraz neľahkú úlohu dať taký výsledok, aby sme udržali trojuholníkovú nerovnosť, a teda musí byť aspoň 9. To sa dá dosiahnuť jediným spôsobom, a to ak bude ***F* = 7** a ešte sa k tomu prenesie 1 z predošlého sčitovania.

```
   9 8 9 1 D E
 + 1 9 F D G
 1 0 0 8 ? ? ?
(1 0 0 8 9 E D)
```

Obr. 2

Tak teda sčitujeme „*D plus D*“ a vieme len to, že musíme preniesť sľúbenú 1. Jediné neobsadené cifry, ktoré toto zvládnu, sú 5 a 6. Ak by sme použili 5, výsledok bude buď 10, alebo 11 (podľa toho, či sa prenesie 1 z predošlého stĺpca). Lenže ani 0, ani 1 si nemôžeme dovoliť zapísať do výsledku. Prečo? Lebo sú to dve najmenšie cifry, a teda ktorákoľvek z nich by určite bola menšia ako *E*. Náš výsledok ale kvôli trojuholníkovej nerovnosti nesmie byť menší ako tretia strana trojuholníka. Takže je jasné, že ***D* = 6**.

Stále nevieme, či sčitovanie „*D plus D*“, čiže „*6 plus 6*“, dá výsledok 12, alebo 13 – podľa toho, či bude prenesená 1 z predošlého sčitovania. To si ľahko overíme: predošlé sčitovanie je „*E plus G*“ a najväčšie voľné cifry sú 4 a 5. Takže je jasné, že z tohto žiadne prenášanie nevytlčieme a výsledok „*D plus D*“ bude 12. Tým pádom musí byť ***E* = 2**, opäť preto, aby výsledok nebol menší ako tretia strana trojuholníka.

Ostáva iba písmeno *G* a cifry 3, 4, 5. Sčitovanie „*G plus 2*“ je naša posledná šanca, aby bol výsledok väčší ako tretia strana trojuholníka. Jediný spôsob, ako túto šancu využiť, je dosadiť ***G* = 5**.

Ku všetkým písmenám sme priradili cifry. Všetky naše kroky boli jednoznačné, a preto je toto jediným riešením. **Obvod trojuholníka je 19765 + 989162 + 1008926 = 2017853.**

Bodovanie:

použitie trojuholníkovej nerovnosti – 0,5b.; každá správne dosadená cifra aj s odôvodnením – 8 × 0,5b.; výpočet obvodu trojuholníka – 0,5b.

Úloha S5: Recept. *Opravovala Simona „Simča“ Galková.*

Táto úloha sa dala vyriešiť viacerými spôsobmi, tu uvediem iba ten, ktorý použila väčšina z Vás. Budeme najprv hľadať najväčšiu párnu hmotnosť, ktorá má navzájom rôzne nenulové cifry a varí sa 1 hodinu. Aby sa šafran varil iba 1 hodinu, musí byť súčin cifier jeho hmotnosti jednociferné číslo, a teda najviac 9. Ak chceme hmotnosť čo najväčšiu, je jasné, že chceme, aby mala čo najviac cifier. Pozrime sa teda najprv iba na počet cifier.

Je zrejmé, že hmotnosť nebude štvorciferná, pretože aj keby sme vzali najmenšie možné cifry: 1, 2, 3, 4; tak je ich súčin 24 a šafran by sa varil viac ako hodinu. Týmto pádom samozrejme hmotnosť nemôže byť ani päť- ani viac-ciferná. Môže teda byť trojciferná? Môže. Ak vyskúšame najmenšie možné cifry: 1, 2, 3; tak je ich súčin 6, jednociferné číslo, to vyhovuje. Už len nájsť správnu trojicu cifier.

Trojice cifier, ktoré po vzájomnom násobení nepresiahnu 9, sú iba 1, 2, 3 a 1, 2, 4. Pravdaže si vyberieme tú s väčšími ciframi, čiže 1, 2, 4. Už len z toho vytvoriť najväčšie párne číslo, a je to. **Najväčšia párna hmotnosť šafranu s nenulovými rôznymi ciframi, ktorá sa varí 1 hodinu, je 412 gramov.**

Teraz budeme hľadať najmenšiu hmotnosť, ktorá sa varí tri hodiny. Podotýkam, že cifry už nemusia byť nenulové a ani rôzne. Niektorí z Vás to predpokladali, avšak treba poriadne čítať zadanie – tieto podmienky sa týkali iba prvej časti úlohy. Našťastie to správny výsledok nijako neovplyvnilo.

Je zrejmé, že hľadané číslo nemôže byť jednociferné, pretože by sa vlastne nevarilo. A čo dvojciferné? Hmotnosti od 10 do 19 to nebudú, pretože majú na mieste desiatok 1, a teda sa varia iba jednu hodinu. Podobne je zrejmé, že hmotnosti od 20 do 24 sa tiež varia iba jednu hodinu. Hmotnosti od 25 do 29 sa síce už varia dlhšie (pri prvom násobení cifier je výsledok väčší ako 10), ale stále sú to iba dve hodiny. Hmotnosti od 30 do 33 sa opäť varia iba jednu hodinu a od 34 do 38 sa varia dve hodiny. A tu sme sa dostali k hmotnosti 39 gramov, ktorá sa ako prvá varí tri hodiny. Keďže sme vyskúšali všetky menšie hmotnosti, je určite najmenšia možná. **Najmenšia hmotnosť šafranu, ktorá sa varí 3 hodiny, je 39 gramov.**

Bodovanie:
pri každej otázke: výsledok – 1b.; vysvetlenie postupu – 1,5b.