Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

32. ročník www.pikomat.sk školský rok 2014/2015

Vzorové riešenia 2. série zimnej časti, kategória 8–9

Úloha S1: Štvorlístky. *Opravovala Michaela „Miški" Zatrochová.*

Zo zadania vieme, že Zaquis mal v zbierke nejaký počet štvorlístkov – nazvime ho X. Povedal, že vie tento počet rozdeliť medzi Ennu a seba tak, aby každý z nich mal počet štvorlístkov väčší ako 30 a zároveň menší ako 40 – počty lístkov po rozdelení označme A a B. Ďalšou podmienkou bolo, že rozdiel druhých mocnín A a B sa musí rovnať X. Pre upresnenie: druhá mocnina znamená, že číslo násobíme samým sebou (napríklad druhá mocnina 5 je 5·5=25). Skvelý postreh, ktorý mnohí z Vás napísali, bol, aký je najmenší možný počet štvorlístkov a najväčší možný počet štvorlístkov. Najmenší je 63, kedy by A a B boli 31 a 32 (nemôžu byť 31 a 31, pretože rozdiel druhých mocnín by bol 0). Najväčší možný počet je 78, kedy by A a B boli 38 a 39. Ďalej sa už dalo postupovať rôznymi spôsobmi. Jedni na to išli skúšaním, ďalší úvahou, avšak najprehľadnejšie vidno riešenie v rovnici:

$A^2 - B^2 = X$ a zároveň $A + B = X$

Z toho vidíme, že $A^2 - B^2 = A + B$

Ľavú stranu si prepíšeme ako $(A - B)\cdot(A+B) = A + B$

a z toho nám vyplýva, že $A - B = 1$.

Takže **počty štvorlístkov po rozdelení medzi Ennu a Zaquisa museli byť dve po sebe nasledujúce čísla**. Možností je niekoľko, pretože to platí pre ktorékoľvek dve po sebe nasledujúce čísla medzi 31 a 39: 31/32, 32/33, 33/34, 34/35, 35/36, 36/37, 37/38, 38/39. A teda počty štvorlístkov, ktoré mohol mať Zaquis, sú: **63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77**. Bolo potrebné, aby ste vypísali všetky riešenia.

Úloha S2: Hojdačka. *Opravoval Pavol „Tamarka" Hronský.*

Našou úlohou je zistiť, ako vysoko nad zemou sa Andride nachádzala, teda aká je vzdialenosť bodu *E* od predĺženej strany *AB*. Vzdialenosť bodu a priamky je dĺžka kolmice spustenej z daného bodu na danú priamku.Takže treba zistiť dĺžku strany *FE* na obrázku.

Ako prvé je dobré si uvedomiť, že v rovnostrannom trojuholníku majú všetky vnútorné uhly veľkosť 60°. Vďaka tomuto si ukážeme, že Δ*DBC* je zhodný (rovnaký) s Δ*BEC*.

Očividne, |∢*CBE*|=60°. Zdôrazňujeme, že v našom Δ*DBC* súčasne platí |∢*DBC*|=60°, |∢*CDB*|=90° a |*CD*|=2 m. Preto v Δ*BEC*, ktorý má stranu *BC* s Δ*DBC* spoločnú a $|\sphericalangle DBC|=|\sphericalangle CBE|$ musí platiť, že $|\sphericalangle BEC|=90°$, lebo v inom prípade by dĺžka strany *EC* nebola 2 m (čo podľa zadania musí byť, lebo je to jedno a to isté lano hojdačky).

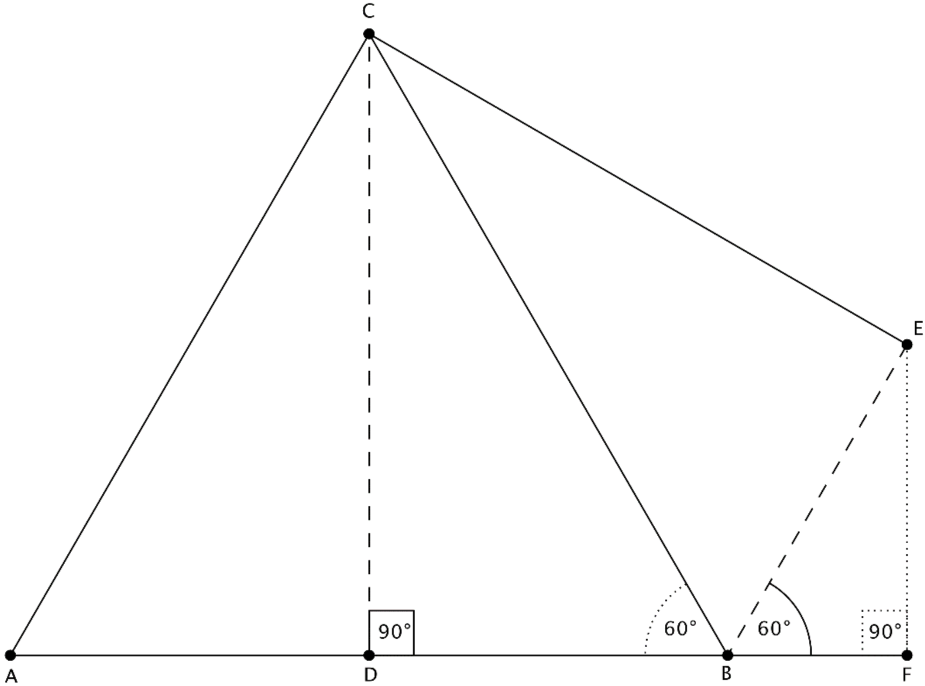
Vidíme teda, že všetky vnútorné uhly v ΔDBC a ΔBEC sú rovnaké. Keďže dĺžky dvoch strán majú rovnakú veľkosť, tak aj tretie strany musia mať rovnakú veľkosť, takže $|DB| = |BE|$.

Keď sme si ukázali, že ΔDBC a ΔBEC sú zhodné, je ľahké podľa vety *uu* ukázať, že ΔBEC a ΔBFE sú podobné. Pre podobné trojuholníky platí, že veľkosti ich vnútorných uhlov sú rovnaké, a teda pomer veľkostí ich strán je konštantný pre každú dvojicu navzájom prislúchajúcich strán v trojuholníkoch.

Pre nás z toho plynie, že strany *CB* ku *BE* sú v rovnakom pomere, ako sú strany *EC* ku *EF*.

Keďže trojuholník je rovnostranný, tak je zrejmé, že bod *D* delí stranu *AB* na polovice, a tým pádom aj $BE = ½\ CB$. Ak má strana *CB* polovičnú dĺžku ako *CB*, tak potom musí aj strana *EF* mať polovičnú dĺžku ako *CE*. Nuž a polovica z dvojmetrového lana je 1 m.

Výsledok je, že Andride sa v danom momente nachádzala presne **1 m** nad zemou.

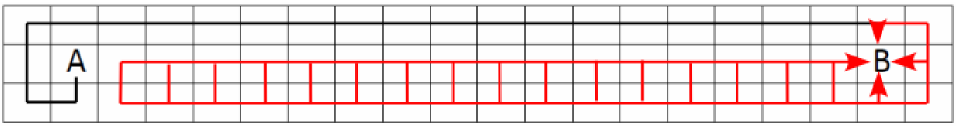


Bodovanie:

Za správny výsledok som udeľoval 1b. Najdôležitejšia časť príkladu bola zdôvodniť zhodnosť ΔDBC a ΔBEC. Tu sa dalo stratiť až 2b. Zvyšné 2b sa dali získať za správne a logicky odôvodnené kroky k výsledku.

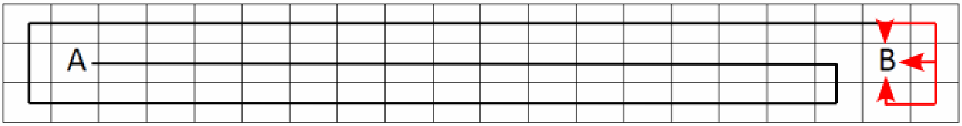
Úloha S3: Uprouine. *Opravoval Juraj „Juro“ Pavlovič.*

Z políčka A sa dalo vyraziť štyrmi smermi: doprava, dole, doľava, alebo hore. Keďže zatáčať sa dá len doprava a nesmieme na žiadne políčko stúpiť dvakrát, tak je jasné, že ak začneme doľava alebo dole, tak nemáme inú možnosť, len sa vydať obchádzať políčko A v smere hodín. Takto sa po pár krokoch dostaneme na políčko nad písmenom A. Vidíme teda, že štartovné smery dole, doľava aj hore sa veľmi skoro stretnú na políčku nad A, a pre ďalší postup sú tým pádom vlastne rovnocenné.
Z políčka nad A musíme pokračovať bez zatočenia stále v hornom riadku až po políčko nad písmenom B. Ak by sme totiž zatočili do stredného riadku skôr, celkom by sme si odrezali cestu k políčku B.
Ak na políčku nad B zatočíme, dostaneme sa na B – hurá, našli sme prvú možnosť! Okrem toho ale tak, ako sme na začiatku obchádzali okolo políčka A, tak teraz môžeme obchádzať aj políčko B. Takže ak trochu vydržíme a nevhupneme doň hneď zhora, tak sa doň vieme dostať aj sprava aj zdola – ďalšie dve možnosti.
Ale to stále nie je všetko. Ešte môžeme aj políčko B celkom obísť a vydať sa spodným riadkom smerom akoby späť ku štartu. A kedykoľvek sa nám bude chcieť, tak môžeme zabočiť doprava, dostaneme sa do stredného riadku, zabočíme ešte raz doprava a vojdeme na políčko B zľava. Možností, kde sa dajú spraviť tieto posledné dve zákruty, je 16 – pretože sú to všetky políčka medzi písmenami A a B.
Takže či už vyrazíme z A-čka smerom hore, doľava, alebo dole, zakaždým budeme mať 19 možností, ako trasu úspešne zakončiť na políčku B: 1 zhora, 1 sprava, 1 zdola a 16 možností zľava. To je spolu 3·19 = 57 možností.



Jediným nepreskúmaným prípadom ostáva štart smerom doprava. Ako prvá nám samozrejme napadne trasa bez akýchkoľvek zatáčok, rovno do B.
Okrem toho ale môžeme v ktoromkoľvek políčku zatočiť doprava do spodného riadku. Tu nám potom neostane nič iné, len zase v smere hodín dookola obísť všetky políčka, ktoré sme zatiaľ navštívili, prejsť „poza“ písmeno A do horného riadku a celý horný riadok prejsť rovno opäť až na políčko nad B.
No a tam už to vlastne poznáme. Ak sme netrpezliví, zatočíme hneď tam na políčko B. Ak trochu vyčkáme a vydáme sa obchádzať políčko B dookola, tak doň vieme vstúpiť aj sprava, zdola alebo aj zľava. Ale pozor: tentokrát už nemáme toľko miesta, kde môžeme spraviť tie posledné dve zákruty, lebo niektoré políčka zo stredného a spodného riadku sme už navštívili na začiatku. Ak by sme hneď po vyštartovaní z A na prvom políčku už zatočili, tak v strednom riadku by ostalo 15 nenavštívených políčok, cez ktoré neskôr môžeme spraviť posledné dve zákruty. To by znamenalo 18 možností, ako trasu ukončiť (15 možností vojsť do B zľava, 1 zdola, 1 sprava, 1 zhora).

Ak by sme po vyštartovaní išli najprv rovno až celkom tesne pred políčko B, a až potom zatočili do spodného riadku, tak by sme už zablokovali celý stredný riadok, a do B by sa dalo dostať už len zhora, sprava a zdola.



Vidíme, že podľa toho, kde spravíme prvú zákrutu, môže byť možností na zakončenie 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4 alebo 3. Keď všetky tieto čísla sčítame, dostaneme 168 možností. Spolu s trasou celkom bez zatáčania je to teda 169 možností, ako trasu prejsť pri štarte smerom doprava.
Všetkých možností, ako prejsť z A do B, je 57+169 = 226.

Úloha S4: Rieka. *Opravoval Lukáš „Jupiter" Babula.*

Nazvime si brehy „pravý" a „ľavý" a povedzme, že na začiatku sú všetci na tom ľavom. Nedávalo by zmysel, aby prvú plavbu plťou riadila hlava niektorej rodiny, pretože by na plti musela odísť aj hlava druhej rodiny, no a to by sa hneď museli obaja vrátiť. Vieme teda, že prvú plavbu musí riadiť Corain. Ten musí zobrať so sebou právnika, ktorý by inak zostal s ostatnými bez Corainovho dozoru. Keď sa preplavia na druhý breh, musí tam právnik ostať, lebo inak by sa nič nezmenilo. Corain preplaví plť späť doľava, právnik ostane sám vpravo.
Opäť ani jedna hlava rodiny nemôže ísť na plťke sama, a ak by šli spolu, tak vpravo by boli s právnikom sami, čo nemôžu. Opäť teda musí ísť Corain a môže niekoho zobrať, keďže právnik je v bezpečí na druhej strane. Hlavu rodiny zobrať nemôže, lebo by jeho synovia ostali sami v prítomnosti druhej hlavy rodiny. A tak Corain prevezie jedného syna. Keďže obe hlavy rodín majú so sebou práve 2 synov, tak je jedno, z ktorej rodiny si Corain vezme pasažiera. Pre prehľadnosť môžeme rodinu Quemener označiť písmenkom **Q** (hlava rodiny – **Q**, potomkovia **q**) a rodinu Tardys obdobne písmenkom **T** a **t**. Povedzme teda, že s Corainom pôjde **q**.
Vrátiť plť naspäť doľava musia Corain a právnik spoločne, lebo inak by právnik mal problém s **q**. Teraz už Corain plť riadiť nemôže, lebo právnik by musel ísť s ním aj doprava aj späť doľava. Teraz však už pripadá do úvahy to, že by plť viedol **Q,** pretože môže so sebou zobrať syna **q** a tým pádom nikoho nenechá samého s **T**. Tak sa preplavia doprava **Q** a **q**. Aby sme sa nevrátili o ten istý krok späť, tak sa s plťou vráti doľava len sám **Q**.
Corain stále nemôže ísť kvôli právnikovi, a tak musíme poslať obe hlavy rodín doprava. Prepravia sa doprava **Q** a **T**. Síce **T** nechal svojich synov len s právnikom a Corainom, ale to nevadí, lebo **Q** má tých svojich na druhom brehu pod palcom, čiže nehrozí žiaden konflikt. Naspäť doľava musíme poslať **T**.
Teraz už sa môžu preplaviť doprava Corain s právnikom. Keď Corain a právnik pristanú napravo, tak jediný, kto sa môže vrátiť doľava, je **Q**. Teraz sa opäť môžu preplaviť

doprava len **Q** a **T**. Potom si plť vezme **T**, preplaví sa sám doľava, kde vyzdvihne jedného svojho syna a odvezie ho doprava. Naspäť doľava teraz nemôže odísť ani sám **Q** a ani sám **T**, pretože by jeden z ich synov ostal s hlavou druhej rodiny. Avšak naľavo je momentálne už len posledný **t** a nikto iný, takže prichádza do úvahy presun Coraina s právnikom. Cestou naspäť doprava Corainovi nič nebráni nechať právnika na ľavom brehu a odísť s **t**, pretože tam právnik ostane sám. Po dovezení **t** sa Corain už len vráti pre právnika, a tým sa všetci ôsmi dostali na druhý breh rieky.

Bodovanie:

Každý, kto správne popísal, prečo sa dejú jednotlivé presuny, dostal plných 5b. Ak bola v riešení len nevysvetlená schéma jednotlivých presunov, dalo sa získať maximálne 3,5b.

Úloha S5: Tabuľa nad stolom. *Opravoval Peter „Comp“ Ambrož.*

Poďme zistiť o číslach všetko, čo sa dá, možno nám to pomôže. Čísla po zaokrúhlení na 10 končia nulou. Rozdiel zaokrúhlených čísel teda tiež končí nulou. Rozdiel pôvodných čísel má byť rovnaký. Ak má končiť nulou, pôvodné čísla musia končiť navzájom rovnakou číslicou. **Zistenie č. 1: Čísla končia rovnakou číslicou**.

Súčin zaokrúhlených čísel sa zväčšil. Takže aspoň jedno pôvodné číslo sa zaokrúhlilo nahor. Keďže obe čísla končia rovnako, zaokrúhľujú sa rovnakým smerom – nahor.

Zistenie č. 2: Čísla končia číslicou 5, 6, 7, 8 alebo 9 (aby sa zaokrúhlili nahor).

Súčin zaokrúhlených čísel (končiacich nulou) končí nulou, a keď od neho odrátame 184, dostávame súčin pôvodných čísel, ktorý tým pádom musí končiť na 6. Akou číslicou sa musia končiť pôvodné čísla, aby ich súčin končil na 6? Pripadajú do úvahy číslice 4 a 6, avšak z toho iba 6 vyhovuje zisteniu č. 2. **Zistenie č. 3: Čísla končia číslicou 6.**

Pri zaokrúhlení nahor sa tak ku obom číslam pripočíta 4, a tým vzniknú zaokrúhlené čísla. Dostávame rovnicu: $(x\cdot y) + 184 = (x+4)\cdot(y+4)$ a upravujeme.

$x\cdot y + 184 = x\cdot y + 4\cdot x + 4\cdot y + 16 \quad // -(x\cdot y) -16$

$168 = 4\cdot x + 4\cdot y \quad // :4$

$42 = x+y$

Zistenie č. 4: Súčet čísel je 42. Aké sú teda tie čísla? Určite obe menšie než 42. Môže byť jedno z nich 36? Nemôže, lebo do 42 by chýbalo už len 6, a to nie je 2-ciferné. Môže byť jedno z čísel 26? Áno, môže. Druhé číslo bude 16. **Zistenie č.5: Jedným z riešení je dvojica 16 a 26.** Môže byť jedno z čísel 16? Áno, druhé bude potom 26, a dostali sme opäť riešenie, ktoré už máme. Číslo už nemôže byť menšie než 16, lebo najbližšie nižšie je 6, a to sme vylúčili. Našli sme riešenie 16 a 26 a ukázali sme, že iné riešenie neexistuje.

Bodovanie:

5 bodov za výsledok a postup, z ktorého je jasné, že ide o jediné riešenie.

4 – 4,5 bodu za menšie matematické chyby alebo nejasnosti v inak dobrom postupe.

3,5 bodu za riešenie, kde ste skončili pri zistení č. 3 a zvyšok ste si natipovali bez vysvetlenia, čo presne skúšate. Toto je zároveň upozornenie: Keď idete skúšať možnosti, popíšte to čo najpodrobnejšie, aby bolo jasné, že ste vyskúšali všetky možnosti a na nič ste nezabudli.

1,5 – 2 body za výsledok bez postupu alebo len s pokusom o postup.