Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

33. ročník www.pikomat.sk školský rok 2015/2016

Vzorové riešenia 1. série zimnej časti, kategória 8–9

Úloha S1: Výpoveď. *Opravoval Lukáš „Jupiter“ Babula.*

Keď Wird roztrhá niektorý z papierov výpovede, tak sa z jedného kusu stane päť kusov. To znamená, že celkový počet kusov sa zvýši o **štyri**. Wird trhá papiere vždy rovnakým spôsobom, a preto sa po každom trhaní zvýši počet útržkov o štyri.

Vieme teda, že Wird mal na začiatku päť kusov a pri každom trhaní mu počet narastie o štyri. Keď teraz od Wirdom narátaných počtov odpočítame tých pôvodných päť kusov, tak nám musí ostať číslo deliteľné štyrmi bezo zvyšku.

2015 – 5 = 2010
2016 – 5 = 2011
2017 – 5 = 2012

Kritérium o deliteľnosti číslom 4 nám hovorí, že číslo je deliteľné 4 bezo zvyšku len vtedy, keď je jeho posledné dvojčíslie deliteľné 4 bezo zvyšku. Tým pádom už ľahko určíme, že 2012 je ako jediné z týchto čísel deliteľné štyrmi.

Tým sme dokázali, že jediné správne riešenie je 2017.

Bodovanie:
nájdenie správneho výsledku – 1b.; vysvetlenie, prečo je tento výsledok správny– 3b.; dokázanie, že sú všetky ostatné výsledky nesprávne– 1b.

Úloha S2: Ediho hra. *Opravovala Zuzana „Zuzka“ Frankovská.*

Pri vyberaní budeme postupovať nasledovne: Najskôr si vyberieme stĺpec, v ktorom je najviac kameňov.

Ak tam sú 4 kamene, čo je najviac, ako sa tam môže zmestiť, tak nám zostávajú 2 kamene a ešte stále môžeme vybrať 1 stĺpec a 2 riadky. Vyberieme preto tie dva riadky, v ktorých sú zvyšné dva kamene (prípadne ak sú v jednom spoločnom riadku, je to iba o to jednoduchšie). Tým pádom máme všetky kamene vo vybratých riadkoch alebo stĺpcoch.

Ak sú tam 3 kamene, tak nám zostávajú 3 kamene a ešte môžeme vybrať 1 stĺpec a 2 riadky. Aj tu je to vcelku jednoduché. Každým výberom „trafíme“ jeden zo zvyšných troch kameňov (prípadne ak niektoré budú v spoločnom riadku či stĺpci, opäť je to iba o to jednoduchšie). Opäť všetky kamene ležia vo vybraných stĺpcoch alebo riadkoch.

Ak sú tam len 2 kamene, tak nám zostávajú 4 kamene a ešte možeme vybrať 1 stĺpec a 2 riadky. Tieto štyri zvyšné kamene musia byť vo zvyšných 3 ne-vybratých stĺpcoch. V žiadnom z týchto stĺpcov nemôžu byť 3 ani 4 kamene, keďže teraz rozoberáme možnosť, že v stĺpci s najviac kameňmi (prvý výber) sú len 2. Zároveň je jasné, že keď sú 4 kamene rozložené do 3 stĺpcov, tak aspoň v jednom stĺpci bude viac ako 1 kameň. Nezostáva nič iné, len možnosť, že v niektorom stĺpci sú 2 kamene. Tento stĺpec vyberieme. Zostávajú nám už len 2 kamene a ešte môžeme vybrať 2 riadky. Opäť každým riadkom „trafíme" jeden zo zvyšných 2 kameňov (ak sú v spoločnom riadku, je to iba o to jednoduchšie).

Ak by v stĺpci, v ktorom je najviac kameňov, bol iba 1 kameň, znamenalo by to, že vo všetkých stĺpcoch môže byť najviac 1 kameň. Spolu by teda na šachovnici mohli byť najviac 4 kamene, čo nesedí so zadaním. Preto tento prípad nemôže nastať.

Rozobrali sme všetky možnosti a pri každej sme dokázali, že vieme vybrať 2 riadky a 2 stĺpce tak, aby sa v nich nachádzalo všetkých 6 kameňov.

Bodovanie:
Podľa spôsobu riešenia BUĎ: dokázanie prípadu, kedy je v každom riadku aj stĺpci aspoň 1 kameň – 2b.; ostatné prípady – 3b.; ALEBO: tvrdenie, že vždy vieme vybrať 2 riadky alebo stĺpce, v ktorých sú dokopy 4 kamene – 1b.; tvrdenie, že na to treba vybrať dva riadky, ktoré majú v sebe najviac kameňov – 1b.; dokázanie týchto tvrdení – 2b.; dôkaz, že zostávajúce kamene vieme vybrať – 1b.

Úloha S3: Rozdelenie hráčov. *Opravovala Kristína „Kika" Prešinská.*

Hráči majú čísla od 0 do 9, čo je 10 rôznych čísel. V skupine A je priemer čísel na dresoch 3,5. Keďže každý hráč má na drese celé číslo, tak musí byť v skupine A párny počet hráčov. Tým pádom do skupín B a C treba rozdeliť tiež párny počet hráčov. Okrem toho v B musí byť viac hráčov ako v C. Zároveň však chceme nájsť najmenší možný súčet pre B, a tak by malo byť našou snahou dať do B čo najmenej hráčov. Z toho vyplýva, že do B vždy dáme iba o 2 hráčov viac ako do C (ak by sme do B dali iba o 1 hráča viac, bol by v B a C dokopy nepárny počet hráčov, čo už vieme, že nejde).

Ak je v C iba 1 hráč, potom v B budú 3 hráči a v A 6 hráčov. Priemer čísel na dresoch v skupine A je 3,5, a teda súčet čísel na dresoch v skupine A bdue $6 \cdot 3{,}5 = 21$. Súčet čísel na všetkých dresoch je $0+1+2+...+9 = 45$. Tým pádom súčet čísel v skupinách B a C je $45–21 = 24$. V skupine B chceme čo najmenší súčet, a preto do skupiny C dáme hráčov s najväčšími číslami – v tomto prípade iba jedného, takže číslo 9. Súčet čísel v skupine B bude $24–9 =$ **15**.

Ak sú v C 2 hráči, potom v B budú 4 hráči a v A tiež 4 hráči. Podobne ako v predošlom odseku, spočítame, že súčet čísel v A bude $4 \cdot 3{,}5 = 14$ (keďže 3,5 je priemer). Tým pádom súčet čísel v skupinách B a C je $45–14 = 31$. Do skupiny C dáme dvoch hráčov s najväčšími číslami, teda 8 a 9. V skupine B bude súčet $45–14–9–8 =$ **14**.

Ak sú v *C* 3 hráči, potom v *B* budú 5 hráči a v *A* iba 2 hráči. Opäť spravíme to isté „cvičenie“, ako v predošlých dvoch odsekoch: Súčet v *A* je 2·3,5 = 7, tým pádom súčet v *B* a *C* dokopy je 45–7 = 38. Do skupiny *C* dáme tri najväčši čísla 7, 8 a 9. Súčet v *B* bude 45–7–7–8–9 = **14**.

Ak by v *C* boli 4 hráči alebo viac, muselo by byť v *B* 6 hráčov alebo viac a už by neostali žiadni hráči pre skupinu *A*. Takže tieto prípady nemôžu nastať a nemusíme sa nimi ďalej zaoberať.

Preskúmali sme všetky možnosti a prišli sme na to, že **najmenší súčet čísel na dresoch v skupine *B* môže byť 14.** Na záver musíme už len overiť, či sa dresy aj naozaj dajú takto rozdeliť. Tu je možností viacero, avšak ako dôkaz, že sa to dá, nám postačí jedno (ktorékoľvek) konkrétne rozdelenie. Napríklad: *C* = 9+8; *A* = 2+3+4+5; *B* = 0+1+6+7. Ľahko skontrolujeme, že všetky podmienky zo zadania sú splnené.

Najmenší možný súčet čísel na dresoch hráčov zo skupiny *B* je 14.

Bodovanie:
v skupine *A* musí byť párny počet hráčov – 1b.; v skupine *B* bude o dvoch hráčov viac ako v skupine *C* – 1b.; v skupine *C* budú hráči s najväčšími číslami – 1b.; v skupine *B* môže byť súčet čísel 14 – 1b.; konkrétny prípad, kedy to funguje – 1b.

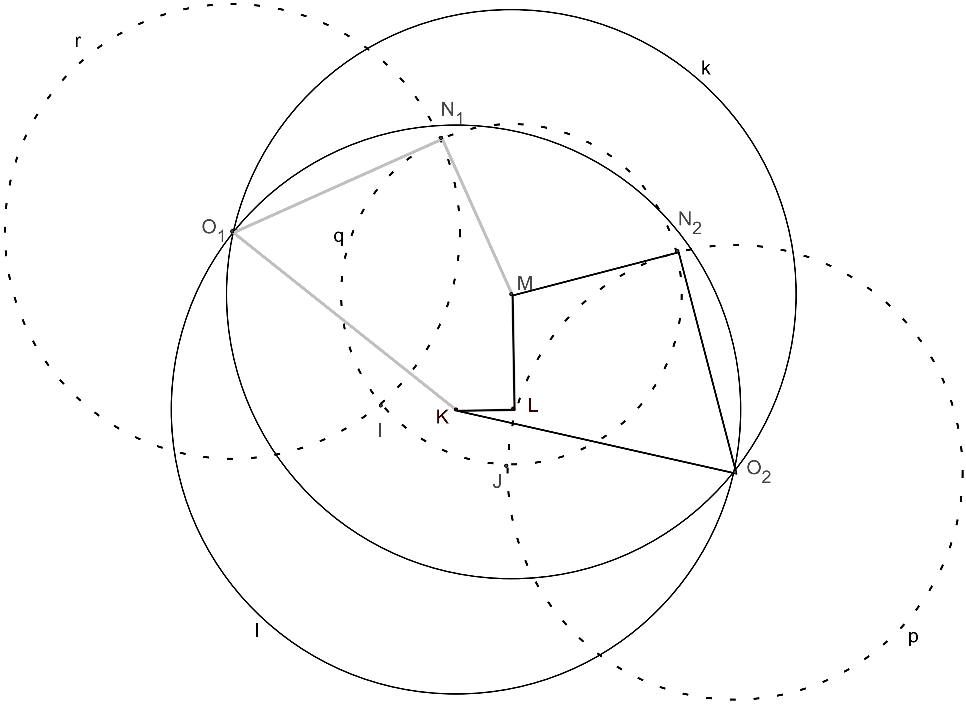
Úloha S4: Pôdorys. *Opravoval Roman Kluvanec.*

Wird hľadal budovu, ktorá mala pôdorys 5-uholníka. Aby ju našiel, postupoval nasledovne. Keďže trojuholník *KLM* je pravouhlý, tak narysoval najskôr úsečku $|KL|$=1 cm, a potom spravil kolmú úsečku $|LM|$=2 cm. Ďalej vedel, že trojuholník *MNO* je pravouhlý, a tak pomocou Pytagorovej vety mohol vypočítať dĺžku úsečky *MO*. Spravil to preto, lebo zatiaľ nevedel, kde presne leží bod *N*.

$$|MN|^2 + |NO|^2 = |MO|^2$$
$$3^2 + 4^2 = |MO|^2$$
$$9 + 16 = |MO|^2$$
$$|MO| = 5\ cm$$

Wird takisto vedel, že dĺžka úsečky $|OK|$=5 cm. Bod O teda ležal na priesečníku dvoch kružníc *k*, *l* s polomerom 5 cm, ktoré mali stredy v bodoch *M* a *K*. Keď narysoval tieto kružnice, zistil, že sa pretínajú v dvoch bodoch. Tie si označil O_1 a O_2. Potom už mohol nájsť bod *N* pre obe tieto možnosti, keďže vedel jeho vzdialenosť od bodu *M* a aj od bodu *O*. Narysoval kružnicu *q* so stredom v bode *M* a polomerom 3 cm a dve kružnice *p*, *r* so stredmi v bodoch O_1 a O_2 a polomerom 4 cm. V priesečníku *q*, *r* našiel bod N_1 pre prvú možnosť, v priesečníku *q*, *p* našiel bod N_2 pre druhú možnosť. Okrem toho majú tieto kružnice ešte aj priesečníky *I* a *J*, avšak Wird si všimol, že v týchto prípadoch by *KLMNO* nebol päťuholník. Našiel 2 správne pôdorysy: $KLMN_1O_1$ a $KLMN_2O_2$ a zistil teda, že takéto budovy sú dve.

Bodovanie:
dve riešenia – 1b. + 1b.; postup – 3b.



Úloha S5: Oslava u Vajtových. *Opravoval Pavol „Lietadlo“ Koprda.*

Na úvod si zopakujme zadanie, keďže jeho znenie bolo vcelku komplikované. Máme týchto 8 výrokov:

Výrok 1: Dávid vraví Barbore: „Ja som o 9 rokov starší než Emil.“
Výrok 2: Emil vraví Barbore: „Ja som o 7 rokov starší od Aničky.“
Výrok 3: Anička hovorí Barbore: „Tvoj vek je o 70 % vyšší než môj.“
Výrok 4: Barbora hovorí Cyrilovi: „Haha, ty starec, veď Emil je od teba mladší.“
Výrok 5: Cyril debatuje s Dávidom: „Rozdiel medzi nami je 6 rokov.“
Výrok 6: Cyril vraví Aničke: „Som od teba o 10 rokov starší.“
Výrok 7: Barbora hovorí Cyrilovi: „Vekový rozdiel medzi tebou a Dávidom je rovnaký ako medzi Dávidom a Emilom.“
Výrok 8: Cyril hovorí Aničke: „Barbora je mladšia než Dávid.“

Ak hovorí mladší človek k staršiemu, tak hovorí pravdu. Ak hovorí starší človek k mladšiemu, tak klame. Našou úlohou je zistiť, kto má koľko rokov.

Na úvod potrebujeme určiť aspoň niektoré dvojice, kto je od koho starší / mladší. Všimnime si **výrok 6**: Ak by bol Cyril mladší ako Anička, tak by hovoril pravdu. Jeho veta, že je od Aničky o 10 rokov starší, by ale pravdivou nebola. Z toho vieme, že **Cyril je starší ako Anička** (aj keď nie presne o 10 rokov)**.** Toto hneď využijeme vo **výroku 8**, ktorý je týmto pádom nepravdivý, teda **Barbora je staršia ako Dávid.** Tento poznatok použijeme vo **výroku 1**, ktorý je týmto pádom pravdivý: **Dávid je o 9 rokov starší od Emila.** Keďže Barbora je staršia ako Dávid a ten je starší ako Emil, tak aj Barbora je staršia ako Emil. Tým pádom **výrok 2** je pravdivý: **Emil je od Aničky o 7 rokov starší.** Doposiaľ zistené si môžeme znázorniť takto:

$$\mathbf{A} < \mathbf{C}$$
$$\mathbf{A} <^{+7} \mathbf{E} <^{+9} \mathbf{D} < \mathbf{B}$$

Ostáva už iba zaradiť na správne miesto Cyrila a poradie bude hotové. Pozrime sa na **výrok 4. Predpokladajme**, že Barbora je staršia ako Cyril a **výrok 4** je nepravdivý, čiže **Emil je starší ako Cyril.** Keďže Dávid je o 9 rokov starší ako Emil, musí byť o viac ako 9 rokov starší aj od Cyrila. Tu však nastáva problém s **výrokom 5**. Na jednej strane by mal byť pravdivý, lebo Cyril je mladší od Dávida. Na druhej strane tvrdí, že je medzi nimi presne 6 rokov, pričom ale my už vieme, že je medzi nimi viac ako 9 rokov. To je evidentný spor, čo znamená, že náš predpoklad – že Barbora je staršia ako Cyril – bol nesprávny. Takže nieto inej cesty, dozvedeli sme sa, že **Cyril musí byť starší ako Barbora**. Poradie máme:

$$\mathbf{A} <^{+7} \mathbf{E} <^{+9} \mathbf{D} < \mathbf{B} < \mathbf{C}$$

Okrem toho, čo ej tu vyznačené, ešte vieme, že:
Barborin vek je o 70% vyšší ako Aničkin. (Výrok 3)
Cyril je o 9 rokov starší od Dávida. (Výrok 7)

Tým pádom je **Dávid o 16 rokov starší od Aničky a Cyril o 25 rokov starší od Aničky.** Ďalej keď vynásobíme Aničkin vek číslom 1,7 (navýšenie o 70%), musíme dostať Barborin vek. To musí byť celé číslo, ktoré je o 17 až 24 väčšie ako Aničkin vek. Celé číslo po vynásobení číslom 1,7 dostaneme len z čísel, ktoré sú deliteľné 10. Teda Aničkin vek môže byť 10, 20, 30, 40... Zároveň musí navýšenie o 70% predstavovať nárast o 17 až 24 rokov, teda

$16 < \mathbf{A} \cdot 0{,}7 < 25$, po úprave (a zaokrúhlení) dostávame: $\underline{22{,}86 < \mathbf{A} < 35{,}71}$

Keďže Aničkin vek musí byť číslo deliteľné 10, tak vyhovuje jedine číslo 30. Ostatné veky hravo dopočítame: **Anička – 30; Emil – 37; Dávid – 46; Barbora – 51; Cyril – 55**. Na záver už len overíme, či sú naozajsplnené všetky podmienky zo zadania a môžeme sa tešiť zo správneho riešenia! Keďže ostatné možnosti sme vylúčili, je to jediné riešenie.

Bodovanie:
výsledok – 2b.; poradie podľa veku – 2b.; dopočítanie vekov – 1b.; za nesprávne tvrdenia čo z čoho vyplýva som strhával maximálne 3b.

Organizátor korešpondenčného
seminára Pikomat