Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

34. ročník www.pikomat.sk školský rok 2016/2017

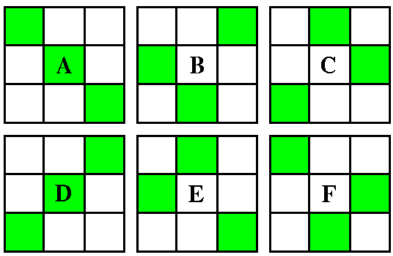
Vzorové riešenia 2. série zimnej časti, kategória 8–9

Úloha S1: Kamene – *Opravoval Peter „Comp“ Ambrož*

Na zemi ležalo 27 zvláštnych kameňov v tvare kociek, z toho 18 bolo priehľadných a 9 nepriehľadných tmavozelených. Polonius sa z nich rozhodol poskladať veľkú kocku veľkosti 3 × 3 × 3 kamene. Ale aby to nebola nuda, chcel, aby pri pohľade z ktorejkoľvek strany kolmo na stenu kocky ju bolo vidno celú tmavozelenú, teda aby cez kocku nebolo vidieť. **Koľkými rôznymi spôsobmi to mohol Polonius urobiť?** Poznámka: Rôzne otočenú rovnakú kocku 3 × 3 × 3 považuj za rôzne kocky.

Máme 9 zelených kociek. Ak sa pozrieme na kocku z vrchu, musí byť v každom z 9 stĺpcov nejaká zelená kocka. Toto isté musí platiť pri pohľade z ktorejkoľvek strany. Z toho vyplýva, že každá trojica kociek tvoriacich priamu líniu (riadok, stĺpec, „komín”) musí obsahovať práve jednu zelenú kocku. Ak by sa niektoré dve zelené kocky prekrývali, nemali by sme ich dosť na pokrytie všetkých 9 pozícií. Do každej jednej vrstvy 3×3 kocky sa tak vojdú 3 zelené a 6 priehľadných kociek. S týmto základom sa teraz môžeme pustiť do ich rozmiestňovania.

Pozrime sa, koľkými spôsobmi môžeme umiestniť 3 zelené kocky do vrstvy 3×3. V prvom stĺpci bude jedna z nich, pričom máme na výber všetky 3 pozície. V druhom stĺpci máme na výber už len z dvoch pozícií, lebo v jednom z riadkov už je zelená kocka. V treťom stĺpci nám ostalo iba jedno miesto. Týmto spôsobom vieme vytvoriť 3×2×1 = 6 rôznych možností, ako môže vyzerať vrstva v kocke. Pre istotu si tieto možnosti (A až F) aj znázorníme na Obr. 1.



Obr. 1

Kocka pozostáva z troch vrstiev a každú z nich musí tvoriť niektorá z možností A až F. Všimnime si, že možnosti A, B, C sa dajú použiť v jednej kocke, lebo keď ich dáme nad seba, každá zelená kocka je na inej pozícii. Podobne sa správajú možnosti D, E, F. Navyše môžeme vidieť, že žiadna z možností A, B, C sa nedá kombinovať so žiadnou z možností D, E, F, lebo by sa pri pohľade z vrchu zelené kocky prekrývali.

Máme teda kocku ABC, ktorej vrchná vrstva je A, prostredná vrstva B a spodná vrstva C. Posledným krokom bude výmena vrstiev, lebo kocka ACB je iná ako ABC. Koľkými spôsobmi môžeme tieto vrstvy povymieňať? Presne šiestimi: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Obdobne môžeme povymieňať vrstvy v kocke DEF. Dokopy tak získame 6 + 6 = 12 rôznych možností pre rozmiestnenie zelených kociek.

Niektorí sa v tomto momente spytujú, prečo teraz ešte nevezmeme týchto 12 riešení a neskúsime ich otáčať zo všetkých strán. Odpoveď je jednoduchá: Nezískali by sme tým žiadne nové rozloženie. Kocky sme predsa vytvárali zo všetkých možností pre vrstvu 3×3. Otočením ľubovoľnej vrstvy vznikne opäť jedna z vrstiev A až F.

Bodovanie:
uvedomiť si, že v každom riadku či stĺpci sa musí nachádzať práve 1 zelená kocka – 2b.; nájsť a správne skombinovať všetky možnosti a zároveň objasniť, prečo žiadne iné možnosti nie sú – 2b.; správny výsledok – 1b.; za drobnú chybu som strhával 0,2 až 0,5 bodu.

Úloha S2: HHČ – *Opravovala Kristína „Kika“ Prešinská*

Predavač mal na začiatku 60 pohárov horskej horúcej čokolády. Jej cenu si mohol určiť každý zákazník sám. Keď Polonius dorazil, predavač mu povedal, koľko šišiek v priemere utŕžil doobeda za jeden predaný pohár, a bolo to celé číslo. Potom si poobede niekto kúpil ešte sedem pohárov, za ktoré zaplatil spolu 2505 šišiek. Tým sa priemerná tržba za jeden predaný pohár zvýšila na rovných 130 šišiek. **Koľko pohárov horskej horúcej čokolády ostalo nepredaných?**

Chceme zistiť, koľko pohárov horskej horúcej čokolády (HHČ) predavač nepredal. Jednoduchšie sa nám vypočíta, koľko ich predal, a potom toto číslo iba odčítame od 60. Vieme, že poobede predal 7 pohárov HHČ. Označme si počet pohárov, ktoré predal doobeda, ako x. Tým pádom za celý deň predal $x+7$ pohárov. Ak priemerná cena za celý deň bola 130 šišiek, znamená to, že zarobil presne toľko, ako keby každý pohár stál 130 šišiek. Tým pádom vieme povedať, že zarobil presne $(x+7)\cdot 130$ šišiek.

Teraz skúsme jeho zárobok vypočítať inak. Sčítajme, koľko zarobil doobeda a koľko zarobil poobede. Doobeda predal x pohárov. Nevieme cenu jednotlivých pohárov ani priemernú cenu za doobedie, vieme len, že priemerná cena bola celočíselná. Označme si priemernú cenu za doobedie ako y. Tým pádom doobeda zarobil $(x\cdot y)$ šišiek. Poobede (vieme zo zadania) zarobil 2505 šišiek. To je za cleý deň dokopy $(x\cdot y)+2505$ šišiek.

Podarilo sa nám celodenný zárobok zapísať dvoma spôsobmi. Keďže oba vyjadrujú to isté, tak sa musia rovnať. Vieme teda, že $\mathbf{(x+7)\cdot 130 = (x\cdot y)+2505}$. Niekoľkými jednoduchými úpravami túto rovnicu dostaneme do tvaru $\mathbf{1595 = x\cdot(130-y)}$. Keďže čísla x aj y sú celé kladné čísla, potom aj číslo $(130-y)$ je celé kladné číslo (pretože súčin $x\cdot(130-y)$ je kladný).

Vyvstáva otázka: Ako vieme číslo 1595 zapísať ako súčin 2 celých kladných čísel? Spravíme si prvočíselný rozklad $1595 = 5\cdot 11\cdot 29$. Vďaka nemu už jednoducho určíme jednotlivé možnosti: $1595 = 1\cdot 1595 = 5\cdot 319 = 11\cdot 145 = 29\cdot 55$. Ktoré s týchto dvojíc môžu predstavovať súčin $x\cdot(130-y)$? Vieme, že číslo x musí byť menšie ako 53, pretože predavač mal len 60 pohárov, z ktorých mu aspoň 7 ostalo na poobedie, preto doobeda mohol predať najviac $60-7 = 53$ pohárov. No a číslo $(130-y)$ zjavne musí byť menšie ako 130, keďže y je kladné celé číslo. Tieto podmienky spĺňa jedine dvojica čísel 29 a 55. Keďže x musí byť menšie ako 53, tak bude $\mathbf{x = 29}$ a $\mathbf{(130-y) = 55}$. Predavač predal doobeda 29 pohárov, poobede 7 pohárov. **Zostalo mu 60–29–7 = 24 pohárov horskej horúcej čokolády.**

Bodovanie:
zostrojenie rovnice a jej úprava – 3b.; správny výsledok – 1b.; odôvodnenie, že je to jediné riešenie – 1b.

Úloha S3: Hlavolam *– Opravoval Jakub „Kubo" Poljovka*

Polonius si vymyslel trojciferné číslo. Filipovi prezradil, že ciferný súčet mysleného čísla je 8. Nikole prezradil ciferný súčin mysleného čísla. Nikola správne určila, že čísel s takým ciferným súčinom môže byť 6 a povedala to Filipovi (nepovedala mu však daný ciferný súčin). Ten povedal: „Už viem, aké sú cifry tohto čísla, ale ešte mi to nestačí." Polonius obom deťom povedal: „Druhá mocnina poslednej cifry nie je deliteľom mysleného čísla." To už deťom stačilo. **Ktoré to bolo číslo?**

V tejto úlohe bolo dôležité postupovať systematicky a nebáť sa vypísať si všetky možnosti cifier, ktorých súčet je 8. Na poradí týchto čísel nám zatiaľ nezáleží. Do riadkov tabuľky sme si vypísali všetky trojčíslia, ktoré majú súčet 8. V prvom riadku sú tie obsahujúce 0, v druhom riadku tie obsahujúce 1 ale bez 0, v treťom riadku tie obsahujúce 2 ale bez 0 a bez 1. Ďalší riadok nie je potrebný, pretože ak sa tam nachádza cifra 3 a viac, tak sa tam musí nachádzať aj cifra menšia ako 3 (inak by sme prešvihli súčet 8).

0	0-0-8; 0-7-1; 0-6-2; 0-5-3; 0-4-4
1	1-1-6; 1-2-5; 1-3-4
2	2-2-4; 2-3-3

Zamerajme sa teraz na ciferné súčiny týchto kombinácií a snažme sa zistiť, pre ktorý ciferný súčin existuje len 6 možných trojciferných čísel. Všetky trojice v prvom riadku majú ciferný súčin 0. Ciferný súčin 0 budú mať všetky trojciferné čísla obsahujúce nulu, a teda ich bude veľmi veľa (100, 101, 102, ...), celkom určite viac ako 6.

Trojica 1-1-6 má ciferný súčin 6. Takýto ciferný súčin nám dajú napríklad čísla: 116, 161, 611, 123, 132, 213, 231... už teraz sme ich našli 7, takže každopádne ich bude viac ako 6.
Trojica 1-3-4 má ciferný súčin 12. Takýto ciferný súčin nám dajú napríklad čísla: 134, 143, 314, 341, 413, 431, 322... už teraz sme ich našli viac ako 6.
Trojica 2-2-4 má ciferný súčin 16. Takýto ciferný súčin nám dajú naprikald čísla: 224, 242, 422, 128, 182, 218, 281... viac ako 6 čísel.
Trojica 2-3-3 má ciferný súčin 18. Takýto ciferný súčin nám dajú napríklad čísla: 233, 323, 332, 192, 129, 219, 291... viac ako 6 čísel.

Zostala nám už iba trojica 1-2-5 s ciferným súčinom 10. Číslo 10 vieme napísať len ako súčin $5 \cdot 2$ (rozklad na prvočísla) a keďže chceme dostať súčin troch cifier, tak $10 = 5 \cdot 2 \cdot 1$. Tieto cifry vieme usporiadať šiestimi spôsobmi: 125, 152, 215, 251, 512, 521. Už nám stačí iba v každom z týchto čísel zistiť, či druhá mocnina poslednej cifry nie je deliteľom tohto čísla, čo platí iba pri čísle 215. **Polonius si vymyslel číslo 215.**

Bodovanie:

vypísanie trojčíslí so súčtom 8 – 1b.; nájdenie správnej kombinácie cifier (1,2,5) – 1,5b.; odôvodnenie, prečo je to jediná správna kombinácia – 1,5b.; správny výsledok – 1b.

Úloha S4: Zápasníci *– Opravovala Ľudmila „Ľudka" Šimková*

Na zápas prišlo 2005 ľudí. Na konci otvorenia dostal každý človek, ktorý si podal ruky s najviac 10 ľuďmi, červené tričko. Potom každý, kto si podal ruky iba s ľuďmi, ktorí dostali červené tričko, dostal modré tričko (niektorí ľudia teda mohli dostať aj červené aj modré tričko). Modré tričko však človek mohol dostať len vtedy, ak si aspoň raz podal ruku s niekým s červeným tričkom. **Dokážte, že počet rozdaných modrých tričiek je vždy menší alebo rovný počtu rozdaných červených tričiek.**

Na začiatok si rozdeľme ľudí na skupiny podľa toho, aké tričko dostali:
Bez: Ľudia, ktorí nedostali žiadne tričko.
Červení: Ľudia, ktorí dostali len červené tričko.
Modrí: Ľudia, ktorí dostali len modré tričko.
Červeno-**M**odrí: Ľudia, ktorí dostali aj červené aj modré tričko.

Ľudia v skupine B počet rozdaných tričiek nijak nezmenia, takže o nich nemusíme uvažovať. Každý človek v skupine Č-M dostane aj červené aj modré tričko. Nás ale nezaujíma presný počet rozdaných tričiek, ale len to, ktorých bolo viac. A keďže ľuďom v Č-M sa rozdá červených tričiek rovnako veľa ako modrých, nijak neovplyvnia to, ktorých sa rozdalo viac. Preto o skupine Č-M taktiež nemusíme uvažovať a ostali nám iba skupiny Č a M. Stačí nám zistiť, v ktorej skupine je viac ľudí.

Čo musí spĺňať človek, aby bol v skupine M? Mohol si podať ruku len s tými, čo majú červené tričko. Nemohol si teda podať ruku s nikým zo skupiny B. Čo tak s ľuďmi v skupine Č-M? Keďže každý z nich má červené tričko, náš človek z M si s nimi pokojne mohol podať ruku. Mohli si ale oni podať ruku s ním? Ich modré tričko hovorí, že nie. Jednoducho preto, lebo modré tričko dostali práve za to, že si podali ruku iba s ľuďmi s červeným tričkom – teda mohli si podať ruku len navzájom v skupine Č-M alebo so skupinou Č, ale s naším človekom v M si ruku určite nepodali. Tým pádom **človek v M si mohol podať ruku jedine s ľuďmi v skupine Č.**

A koľkokrát si musel podať ruku? Na to, aby dostal modré tričko, nemáme žiadne obmedzenie. Ale keďže je v skupine M, tak nemohol dostať červené tričko, a to znamená, že si musel podať ruku aspoň 11-krát (inak by dostal aj to červené tričko a bol by v Č-M a nie v M). **Každý človek v skupine M si podal ruku aspoň 11-krát a podal si ju iba s ľuďmi v skupine Č.**

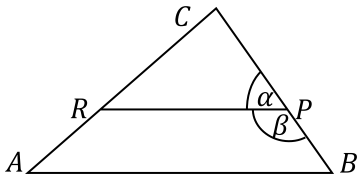
Na jedného Modrého človeka potrebujeme 11 Červených, s ktorými si podá ruku. Na druhého Modrého nám stačí tých istých 11 Červených. Takto vieme vytvoriť až 10 modrých ľudí. Ak by sme chceli 11. Modrého, už si s ním nikto z doterajších Červených nemôže podať ruku, a teda musíme pridať ďalších Červených. Zdá sa nám, že Červených musí byť akosi viac ako modrých. Skúsme lepšie uchopiť informáciu o počte podaných rúk a pomocou nej ukázať, že Červených je viac ako modrých.

Spočítajme podania rúk medzi Červenými a Modrými ľuďmi. Tento počet môžeme zrátať z dvoch strán. Buď zarátame podania rúk od Červených ľudí, alebo podania od Modrých. Označme si počet Červených ľudí ako $č$ a počet modrých ako m. Vieme, že každý Červený človek si mohol podať ruku najviac s 10 ľuďmi. Všetci Červení si dokopy podali ruku s Modrými najviac ($10 \cdot č$)-krát. Na druhej strane, každý Modrý si musel podať ruku aspoň 11-krát. Všetci Modrí si dokopy podali ruku s Červenými aspoň ($11 \cdot m$)-krát. Z tohto môžeme usúdiť, že podaní rúk medzi Č a M je aspoň ($11 \cdot m$), ale najviac ($10 \cdot č$). Toto môžeme zapísať ako $(10 \cdot č) \geq (11 \cdot m)$, čo po upravení dáva $č \geq (11/10) \cdot m$. Keďže 11/10 je číslo väčšie ako 1, $č$ musí byť viac ako m, a teda ľudí v skupine Č je viac ako v skupine M.

Bodovanie:
rozdelenie na skupiny – 1b.; zanedbanie B a Č-M – 0,5b.; získanie iba modrého trička – 1b.; M si môžu podať ruky len s Č – 1b.; Č≥M – 1,5b.

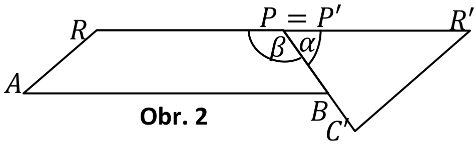
Úloha S5: Vlajky *– Opravoval Martin „Panda“ Svetlík*

Dá sa rozseknúť každý
a) trojuholník,
b) štvoruholník
na niekoľko častí tak, aby z nich išiel priložením častí k sebe zostaviť obdĺžnik?
Poznámka: Nezabudni sa zamyslieť aj nad nepravidelnými a nekonvexnými štvoruholníkmi.



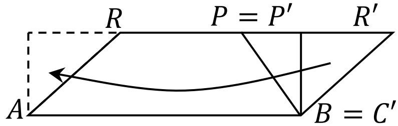
Obr. 1

Začnime trojuholníkom. Na to, aby sme z neho dostali obdĺžnik, potrebujeme niekde vytvoriť pravé uhly a rovnobežky. Spravme si teda rovnobežku PR s niektorou stranou, napr. AB (zatiaľ sa tvárime, že nevieme, že bude v strede výšky, zatiaľ vieme len, že chceme rovnobežku so stranou) – Obr. 1. Táto nám rozdelí trojuholník na dve časti – lichobežník, a trojuholníkovú „čiapočku“ na ňom. Táto úsečka nám takisto vytvorí pri bode P a R dva nové uhly α a β, ktoré majú dokopy $180°$. Keď teraz **otočíme čiapočku okolo bodu $\boldsymbol{P}$** tak, aby úsečky PC a PB ležali cez seba, uhly α a β budú zase ležať pri sebe a tvoriť $180°$ uhol – Obr 2. Takže nám vznikla úsečka RR', ktorá je rovnobežná s AB. Keby PB a PC boli rovnako dlhé, otočený bod C' by sa dostal priamo na B a mali by sme rovnobežník $ABR'R$. **Takže body $\boldsymbol{P}$ a $\boldsymbol{R}$ si na začiatku dáme do stredov strán $\boldsymbol{BC}$ a $\boldsymbol{CA}$.** No a z rovnobežníka už len usekneme na jednej strane pravouhlý trojuholník, a dáme ho na druhú stranu, a máme obdĺžnik – Obr. 3.



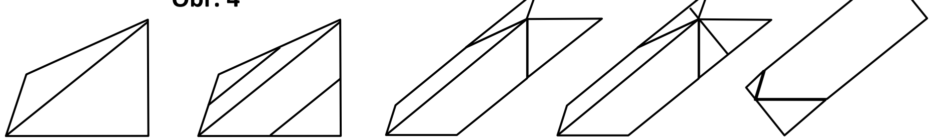
Obr. 2

Toto vieme spraviť s každým trojuholníkom. Pozrime sa na štvoruholníky. Ľubovoľný, aj nepravidelný štvoruholník si vieme po uhlopriečke rozseknúť na dva trojuholníky. S tými potom už len spravíme to, čo sme si ukázali vyššie. A keď to s nimi spravíme tak, že za stranu AB tých trojuholníkov zoberieme práve tú uhlopriečku, po ktorej sme sekali, budú mať tie dva vzniknuté obdĺžniky rovnakú jednu stranu, takže dokopy to bude jeden veľký obdĺžnik.



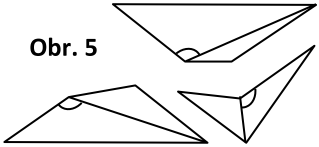
Obr. 3

Obr. 4



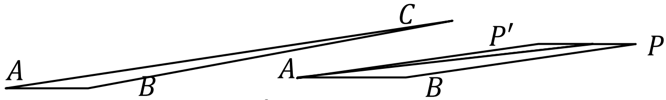
Jediný problém, kde toto nebude úplne fungovať, nastáva v štvoruholníkoch, ktoré keď rozdelíme na trojuholníky po uhlopriečke, tak niektorý z nich bude tupouhlý s tupým uhlom práve pri tej uhlopriečke. V prípade, že pri rozdelení po druhej uhlopriečke to bude OK, tak to spravíme tak, ale pri niektorých sa tomuto problému nevyhneme. Napríklad sa to môže stať v niektorých lichobežníkoch, nekonvexných štvoruholníkoch, alebo v niečom nepravidelnom – Obr. 5.

Keď mám totiž **veľmi tupý uhol** a veľmi krátku tú stranu (v porovnaní s ďalšími dvoma) a spravím si úsečku PR a otáčam čiapočku okolo bodu P alebo R, môže mi vzniknúť rovnobežník, z ktorého nebudem vedieť useknúť pravouhlý trojuholník tak, ako chceme podľa nášho postupu – Obr. 6.

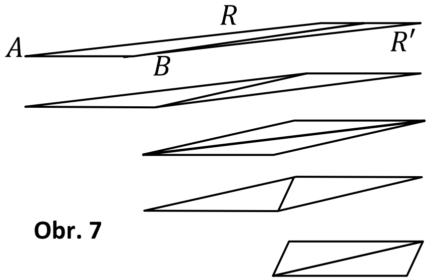


Obr. 5

Čo potom? Jeden nápad by bol spraviť z toho obdĺžnik nad inou stranou (AC, nie AB). Lenže tak by sme nedostali dva obdĺžniky s rovnakou stranou. Mohli by sme ich skúsiť ešte nejako rozrezať a preskladať aby mali rovnakú stranu. Touto cestou ale nechcete ísť (ak veľmi chcete, skúste to napríklad s obdĺžnikmi s rozmermi 2×3 a $\pi \times \sqrt{2}$. Fuj).



Obr. 6



Obr. 7

Druhý, oveľa lepší nápad je, že sa nenecháme odradiť, a pokračujeme ďalej, akurát to možno bude chcieť pár krokov navyše. Neodsekneme z $ABR'R$ (Obr. 7) pravouhlý trojuholník, keďže ešte nemáme ako, ale **rozsekneme ho na dva trojuholníky po kratšej uhlopriečke**, a len ich k sebe priložíme z opačnej strany (t.j. na Obr. 7 to sekneme podľa BR, a spojíme to tak, že úsečku BR' priložíme na AR). Takéto seknutie zopakujeme ešte párkrát, až kým nebude možné odseknúť pravouhlý trojuholník.

Môžeme si byť istí, že sa nám to podarí na konečný počet krokov, lebo úsečku RR' v každom kroku (seknutie+preloženie) posunieme o jej dĺžku smerom od R' po R. A keďže jej dĺžka je nenulová a jej vzdialenosť od polohy „nad AB“ je konečná, podarí sa nám to konečným počtom krokov (túto vetu som samozrejme od Vás nevyžadoval vo Vašich riešeniach ☺, ale je dobré si to uvedomiť, že teda je to naozaj spraviteľné).

Bodovanie:
rozdelenie trojuholníka – 2,5b.; myšlienka, že štvoruholník si rozdelíme na dva trojuholníky a použijeme predošlý postup – 1,5b.; Doriešenie špeciálnych prípadov – 1b.