Vzorové riešenia 3. série zimnej časti, kategória 8–9

Úloha S1: Oči – *Opravovali Michaela Ždímalová a Michaela Rusnáková*

David, Horatio, Sebastian a MacLynn mali dokopy štyri modré a štyri zelené oči, pričom všetci štyria tento fakt poznali. David hneď na začiatku zatvoril oči a vyhlásil, že je príliš unavený. Zvyšní traja si videli farby očí navzájom, no nepoznali farbu svojich očí a nevedeli farbu Dávidových očí. Postupne vyslovili v tomto poradí tieto pravdivé výroky:

1. *Horatio*: Neviem, akej farby sú moje oči.
2. *Sebastian*: Neviem, akej farby sú moje oči.
3. *MacLynn*: Neviem, akej farby sú moje oči.
4. *Horatio*: Neviem, akej farby sú moje oči.
5. *Sebastian*: Viem, akej farby sú moje oči.

Akej farby boli Sebastianove oči? Poznámka: Každý človek má práve dve oči. Človek môže mať jedno oko modré a druhé zelené.

Horatio, Sebastian a MacLynn vedeli, že majú aj s Davidom dokopy štyri modré a štyri zelené oči. Prví traja – okrem Davida – tiež videli farbu očí zvyšných dvoch. Horatio sa na začiatku pozrel na Sebastianove a MacLynnove oči a nevedel, aké má oči. To znamená, že určite nevidel štyri modré oči, lebo vtedy by vedel, že má zelené oči a tiež nemohol vidieť štyri zelené, lebo by vedel, že má obe modré. Aj Sebastian a MacLynn sa pozreli na oči zvyšných a tiež nevedeli akej farby sú ich oči, a teda aj pre zvyšné dve dvojice (Horatio a MacLynn, Horatio a Sebastian) platí, že nemajú štyri oči rovnakej farby. Dvojice mužov sú tri a muži majú oči len dvoch rôznych farieb a to znamená, že aspoň jeden z nich má rôzne oči – jedno oko zelené a druhé modré. Aby bol počet modrých aj zelených očí štyri, rôzne oči musia dvaja alebo štyria ľudia. Stačí aby mal aspoň jeden z týchto troch rôzne oči, keďže človek s rôznymi očami môže byť aj David, ktorého farbu očí nikto nepoznal.

Keď Horatio znova prehovoril, vedel, že aspoň jeden z prvých troch má dve rôzne oči a aj tak nevedel, aké má oči. Horatio mohol pri svojom tvrdení vidieť nasledovné páry očí:

- **modré+zelené** a modré+zelené – v takom prípade **nevie** o svojich očiach povedať nič, lebo nevie, či sú dvaja ľudia s rôznymi očami alebo štyria. Dokonca ak sú dvaja, tak nevie, či má sám obe oči modré alebo obe zelené. Táto možnosť je prípustná.
- **modré+zelené** a zelené+zelené – v takom prípade **netuší**, či on sám má dve rôzne farby očí, alebo má dve modré (vtedy by mal dve rôzne oči David). Táto možnosť je prípustná.
- **modré+zelené** a modré+modré – tento prípad je rovnaký ako predošlý, len s inou farbou, **nevie** o svojich očiach povedať aké sú. Táto možnosť je prípustná.
- modré+modré a zelené+zelené – tu **už vie**, že musí byť jedným z dvoch ľudí s rôznymi očami. Táto možnosť preto nastať nemohla.

Všimnime si, že **Horatio videl určite aspoň jeden pár modré+zelené**. Následne sa Sebastian pozerá opäť na oči Horatia a MacLynna. Tentokrát už ale vie povedať, akej farby sú jeho oči. Zapíšme si, čo mohol vidieť, pričom prvý pár očí bude patriť Horatiovi a druhý MacLynnovi:

- modré+zelená a modré+zelené – v takom prípade **nevie** o svojich očiach povedať nič.
- modré+modré a zelené+zelené – v takom prípade museli byť Sebastián a David tí dvaja, čo majú každé oko inej farby – teda **tu Sebastián vie, aké má oči, a sú obe rôzne**.
- zelené+zelené a modré+modré – situácia je rovnaká ako predošlá, len sa vymenili farby pozorovaných očí - teda **tu Sebastián vie, aké má oči, a sú obe rôzne**.
- modré+zelené a modré+modré – vieme, že Horatio videl aspoň jeden pár modré+zelené. Keďže MacLynnove oči to neboli, musí **Sebastián mať rôzne oči a vie to**.
- modré+zelené a zelené+zelené – tak ako v predošlom prípade, iba so zamenenými farbami, musia byť **Sebastianové oči obe rôzne a vie to o sebe s istotou povedať**

Pozrime sa na prípady, kedy Sebastián vie určiť farbu svojich očí. Vidíme, že **v každom takom prípade je jedno jeho oko modré a druhé zelené**, a teda sme úlohu jednoznačne vyriešili.

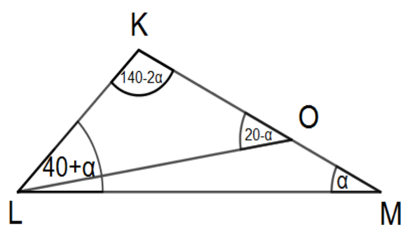
Bodovanie:

za zistenie, že Sebastian a MacLynn nemajú štyri rovnaké oči - 1,5b.; za zistenie, že ani Horatio s MacLynnom a Horatio so Sebastianom nemajú štyri rovnaké oči – 1b.; za uvedomenie, že aspoň jeden z trojice Horatio, Sebastian, MacLynn má rôzne oči – 1b.; za uvedomenie, prečo Horatio ani druhýkrát nevie, aké má oči, ale Sebastian už áno – 1,5b.

Úloha S2: Ruky preč! – *Opravoval Matúš Zubčák*

„Dostaneš krajec chleba v tvare trojuholníka *KLM*, kde strana *KM* je dlhšia ako *KL*. Ja vyznačím bod *O* na strane *KM* tak, že body *O* a *L* budú rovnako vzdialené od *K*. Následne si pre seba odrežem trojuholník *OLM*. **Ak viem, že rozdiel veľkostí uhlov vo vrcholoch *L* a *M* trojuholníka *KLM* je 40 stupňov, aký veľký bude uhol *OLM*?**“

Zo zadanie vieme, že rozdiel vnútorných uhlov KLM a KML je 40°. Tiež vieme, že v trojuholníku vždy oproti väčšej strane leží väčší uhol. Nakoľko platí zo zadania platí, že |KM| > |KL| tak potom bude tiež platiť, že |∢ KLM| > |∢ KML|. UholKML si označíme α. Potom platí, že **|∢ KML| = 40° + α**.



Vieme, že súčet vnútorných uhlov v trojuholníku je 180°. Nakoľko poznáme veľkosť uhlov KML a KLM tak si vieme ľahko dopočítať, že **|∢ LKM| = 140° - 2α**.

Nakoľko zo zadania vieme, že |KL|=|KO|, tak platí, že trojuholník KMO je rovnoramenný so základňou MO. Ak je trojuholník rovnoramenný tak platí, že veľkosti vnútorných uhlov pri základni sú rovnaké. Preto platí, že **|∢ KLO| = |∢ KOL|**.

Z poznatku, že súčet vnútorných uhlov v trojuholníku KLO je 180° si vieme ľahko dopočítať, že 2·|∢ KLO| = 180° - (140° - 2α), teda **|∢ KLO|= 20 + α**.

Nakoľko vieme, že uhol KLM je rozdelený úsečkou LO na uhly KLO a OLM, tak platí, že |∢ KLM| = |∢ KLO| + |∢ OLM|. Dosadíme za |∢ KLM| a |∢ KLO| známe hodnoty:

$40° + \alpha = 20° + \alpha + |\sphericalangle OLM|$
$|\sphericalangle OLM| = 20°$

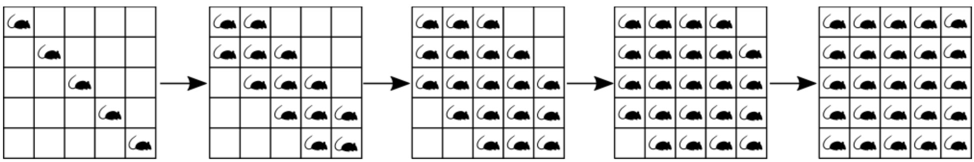
Veľkosť uhla OLM bude tým pádom 20°.

Bodovanie:
za poznatok $|\sphericalangle KLM| = |\sphericalangle KML| + 40°$ a zdôvodnenie – 1b.; za poznatok, že trojuholník KLO je rovnoramenný a zdôvodnenie – 1b.; za správny výsledok – 1b.; za kompletný postup – 2b.

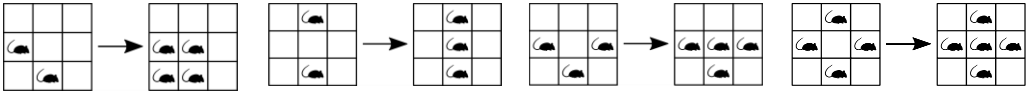
Úloha S3: Krysy – *Opravoval Marián Poturnay*
New York bol rozdelený na štvrte, ktoré tvorili štvorčekovú sieť $N \times N$ štvrtí. Na začiatku bolo niekoľko štvrtí zamorených krysami. Ak niektorá štvrť susedila s *aspoň* dvoma zamorenými štvrťami, tak sa zamorila tiež. Susedné štvrte boli také, ktoré zdieľali spoločnú hranu. **Koľko muselo byť na začiatku zamorených štvrtí, aby sa postupne zamorili krysami v meste všetky štvrte? Nezabudni svoje tvrdenie dokázať.**

Táto úloha od nás vyžaduje, aby sme našli najmenší počet na začiatku zamorených štvrtí, pre ktorý sa všetky štvrte mesta zamoria krysami. Na to musíme spraviť dva dôležité kroky. Ak chceme o nejakom začiatočnom počte štvrtí prehlásiť, že je najmenší, musí sa pre tento počet dať nájsť začiatočné rozmiestnenie zamorených štvrtí, pre ktoré sa zamoria všetky štvrte. Súčasne musíme ukázať, že nami nájdený počet štvrtí je skutočne najmenší, teda že pre menší počet štvrtí by sa nezamorilo celé mesto.

Najprv ukážme, že **N štvrtí zamorených na začiatku stačí na to, aby sa zamorili všetky štvrte.** Umiestnime všetky štvrte na niektorú z uhlopriečok štvorčekovej siete N×N. Každá štvrť na uhlopriečke tejto siete, ktorá susedí s nejakou zamorenou uhlopriečkou, susedí s dvomi zamorenými štvrťami. Preto sa štvrte na týchto uhlopriečkach tiež zamoria. To bude mať za následok, že zamorenie sa bude šíriť takto: Vždy sa zamoria obe ešte nezamorené uhlopriečky, ktoré susedia s uhlopriečkou zamorenou v predošlom rozšírení zamorenia. Nakoniec sa zamorenie rozšíri na všetky uhlopriečky, a tak sa zamoria všetky štvrte. Príklad šírenia sa zamorenia pre N=5 je vidno na tomto obrázku:



Ďalej ukážeme, že **N-1 štvrtí nestačí**. Pozrime sa na to, akými spôsobmi sa vie zamorenie šíriť. Sú 4 možnosti. Dve možnosti, ak sa zamorenie šíri na štvrť, ktorá susedí s dvomi zamorenými. Po jednej možnosti, ak sa zamorenie šíri na štvrť, ktorá susedí s tromi alebo štyrmi zamorenými štvrťami.



Intuitívne sa nám zdá, že možnosti, kde využívame tri alebo štyri zamorené štvrte na vytvorenie ďalšej sú premrhanými príležitosťami, pretože s tromi zamorenými štvrťami vieme zamoriť štvorec 3×3 a so štyrmi zamorenými štvrťami dokonca štvorec 4×4. Preto by sme asi chceli viac využívať možnosti, kde na rozšírenie zamorenia používame len dve zamorené štvrte. Čo majú tieto možnosti spoločné? V oboch prípadoch má štvrť, na ktorú sa šíri zamorenie, dve dôležité vlastnosti. Prvou je už spomenutá vlastnosť, že **táto štvrť bola zamorená len dvomi zamorenými štvrťami** – teda toto políčko susedilo s dvomi hranami zamorených štvrtí. Druhou dôležitou vlastnosťou je, že **táto štvrť susedí s dvomi nezamorenými štvrťami** – a tak vie na šírenie nákazy použiť dve svoje hrany. To znamená, že sme použili dve hrany na to, aby sa táto štvrť zamorila, a dostali sme dve nové hrany na ďalšie šírenie zamorenia. Čo je ale podstatnejšie, obvod zamoreného územia sa pri tom nezmenil.

Preto sa pozrime, **ako sa mení obvod zamorenej oblasti pri jednotlivých možnostiach** – teda sledujme súčet všetkých obvodov všetkých častí mesta, kam sa už dostalo zamorenie (do obvodu nezapočítavame strany, ktoré sú medzi dvomi zamorenými štvrťami). V možnostiach, keď vzniká zamorená štvrť vďaka tomu, že susedí s dvomi zamorenými štvrťami, sa obvod zamorenej oblasti nemení. V prípade, že na rozšírenie zamorenej oblasti využívame tri alebo štyri zamorené štvrte sa obvod dokonca zmenšuje o 2 a o 4. Takže **obvod zamorenej oblasti nikdy nerastie**.Ak by sme začali s N-1 zamorenými štvrťami, tak najväčší možný obvod zamorenej oblasti na začiatku je 4·(N-1) – každá z N-1 zamorených štvrtí má obvod 4 (ak dve zamorené štvrte susedia, je obvod zamorenej oblasti ešte menší). Na konci ale potrebujeme, aby mala zamorená oblasť obvod rovný obvodu štvorca N×N, ktorý je 4N. Keďže obvod zamorenej oblasti nemôže rásť, tak ho nevieme zvýšiť z 4·(N-1) na 4N. To znamená, že **na začiatku nestačí N-1 zamorených oblastí**.

Takže sa nám podarilo ukázať, že N štvrtí na začiatku stačí na to, aby sa zamorili všetky štvrte, a súčasne sme ukázali, že N-1 štvrtí na to nestačí. Preto môžeme prehlásiť, že **na začiatku muselo byť zamorených aspoň N štvrtí**.

Bodovanie:

za určenie, že minimálny počet zamorených štvrtí na začiatku je N – 0,5b.; za nájdenie príkladu zamorenia štvrtí na začiatku – 1b.; za snahu ukázať, že N-1 štvrtí nestačí – 1b.; za myšlienku pozorovania obvodov – 1b.; za popis zmien obvodov pri jednotlivých zamoreniach – 1b.; za dovysvetlenie, prečo N-1 štvrtí nestačí – 0,5b.

Úloha S4: Guľa – *Opravovala Karolína Pisoňová*

V triede bolo 30 žiakov. Každý mal priradené poradové číslo podľa abecedného zoznamu. Učiteľ vyvolával žiakov podľa tohto pravidla: sčítal poradové čísla dvoch naposledy vyvolaných žiakov a ak bol súčet väčší ako 30, odčítal od tohto súčtu 30. Výsledok bolo poradové číslo žiaka, ktorý bol vyvolaný. Napríklad ak by naposledy vyvolaní žiaci mali poradové čísla 15 a 16, ďalší vyvolaný žiak by mal poradové číslo 15 + 16 − 30 = 1. **Dokáž, že žiaci Horowitz, Smith a Murray nemohli byť vyvolaní v tomto poradí bezprostredne za sebou.**

Poradové čísla žiakov Horowitz, Smith a Murray si označme ako H, S a M. Z abecedného poradia je jasné, že musí platiť: $1 \leq H < M < S \leq 30$.
Chceme, aby po žiakoch Horowitz a Smith bol bezprostredne vyvolaný žiak Murray. Aby sa to mohlo stať, tak podľa učiteľových pravidiel musí platiť jedna z možností:

1. $H+S=M$ v prípade, že súčet čísel H a S je menší alebo rovný 30
2. $H+S-30=M$ v prípade, že súčet čísel H a S je väčší ako 30.

Poďme sa pozrieť, či môže nastať prvá možnosť. Súčtom dvoch kladných čísel bude určite číslo väčšie ako každé z týchto čísel. Preto aj súčtom čísel H a S bude číslo väčšie ako H aj ako S. Ale vieme, že M je kvôli abecednému poradiu menšie ako S. Teda ak by bol súčet čísel H a S menší ako 30, tak nemohol byť po žiakoch Horowitz a Smith vyvolaný žiak Murray. Pozrime sa teraz na druhú možnosť. Upravme si trochu rovnicu, ktorú by poradové čísla žiakov teraz mali spĺňať:

$$H+S-30=M \qquad /-S-M+30$$
$$H-M=30-S$$

Vieme, že M je väčšie ako H, a teda H-M bude menšie ako 0. Aby platila posledná rovnica, tak aj 30-S by malo byť menšie ako 0. Avšak vieme, že S nemôže byť väčšie ako 30, teda ani 30-S nemôže byť menšie ako 0. Keďže táto rovnica nebude nikdy platiť, tak ani teraz nemôžeme vyvolať žiakov v danom poradí.

Týmto sme overili všetky možnosti a dokázali sme, že žiaci Horowitz, Smith a Murray nemohli byť vyvolaní v tomto poradí bezprostredne za sebou.

Bodovanie:
za úplný dôkaz, že žiakov nevieme vyvolať v danom poradí, ak je S+H menej alebo rovnako ako 30 – 1,5b.; za úplný dôkaz, že ich nevieme vyvolať v danom poradí ani keď je S+H viac ako 30 – 3,5b.

Úloha S5: Ktoré štvrte prehľadať? – *Opravovali Ľudmila Šimková a Michal „Hago“ Hagara*

Tom vedel, že bude musieť prehľadať 33 štvrtí, v ktorých bolo dokopy 430 úkrytov, kde som sa mohol nachádzať. Tom vedel, koľko bolo úkrytov v každej štvrti. Tom chcel začať hľadať v takých 20 štvrtiach, aby v nich bolo dokopy viac ako 260 úkrytov. **Mohol si Tom vždy vybrať 20 takých štvrtí pre *ľubovoľné* rozloženie úkrytov v rámci všetkých štvrtí?**

Ak nevieme odpovedať na Tomovu otázku, pomôže skúsiť si niekoľko konkrétnych rozložení úkrytov v rámci všetkých štvrtí. (Skús si úkryty nejako rozdeliť medzi všetkých 33 štvrtí a čítaj ďalej.) Ak vyberieme 20 štvrtí s najväčším počtom úkrytov (skrátene najväčších 20 štvrtí), uvidíme, že majú spolu aspoň 261 úkrytov. Ak skúsime ďalšie rozdelenia, zakaždým 20 najväčších štvrtí má spolu viac ako 260 úkrytov. Môžeme tak nadobudnúť pocit, že vždy vieme nájsť takých 20 štvrtí, ktoré majú spolu viac ako 260 úkrytov. Ako to ukážeme pre ľubovoľné rozloženie bez toho, aby sme ich všetky skúšali?

Skúsme to ukázať akoby naopak. Čo by sa stalo, keby Tom pre nejaké rozloženie úkrytov nevedel vybrať takých 20 štvrtí, ktoré majú spolu viac ako 260 úkrytov? Každých 20 štvrtí by tak malo spolu najviac 260 úkrytov. Teda aj keď vyberie 20 najväčších štvrtí budú mať spolu najviac 260 úkrytov. Zvyšných 13 nevybratých štvrtí tak musí mať spolu aspoň 430 – 260 = 170 úkrytov. Najmenej koľko úkrytov musí mať najväčšia z týchto 13 nevybratých štvrtí? Ak by v nej bolo len 13 úkrytov, vo zvyšných 12 najmenších štvrtiach by tak mohlo byť tiež najviac 13 úkrytov. Spolu by tak v nevybratých štvrtiach bolo najviac 13 · 13 = 169 úkrytov. Ak by v nej bolo menej ako 13 úkrytov, spolu by ich v nevybratých štvrtiach bolo ešte menej. Takže v najväčšej z 13 nevybratých štvrtí musí byť aspoň 14 úkrytov. To znamená, že v každej z 20 najväčších štvrtí, je aspoň 14 úkrytov, inak by neboli najväčšie. Ak každá z 20 štvrtí má aspoň 14 úkrytov, spolu majú aspoň 20 · 14 = 280 úkrytov, čo je viac, ako sme im na začiatku „dovolili".

Podarilo sa nám ukázať nasledujúcu vec: Ak by v nejakom rozložení úkrytov Tom nevedel vybrať takých 20 štvrtí, ktoré majú spolu aspoň 260 úkrytov, 20 najväčších štvrtí by muselo mať spolu aspoň 280 úkrytov. Vidíme, že začiatok a koniec si odporujú. Preto musel byť náš predpoklad na začiatku nesprávny a **Tom si vždy vie vybrať takých 20 štvrtí, ktoré majú spolu viac ako 260 úkrytov.**

Vieme to ukázať aj priamo. Priemerne je 430 : 33 ≐ 13,03 úkrytov na jednu štvrť. V 20 najväčších štvrtiach je priemerne aspoň toľko úkrytov, čo vo všetkých 33 štvrtiach. Ak tento priemerný počet vynásobíme 20 štvrťami, dostaneme približne 260,6. Teda v 20 najväčších štvrtiach musí byť spolu aspoň 260,6 úkrytov, teda aspoň 261. Ešte treba ukázať tvrdenie, že v 20 najväčších štvrtiach je priemerne aspoň toľko úkrytov, čo vo všetkých 33 štvrtiach.

Majme niekoľko čísel. Ak vynecháme číslo, ktoré je rovnaké ako priemer všetkých čísel, priemer zvyšných čísel sa nám nezmení. Ak vynecháme číslo menšie ako priemer všetkých čísel, priemer zvyšných čísel sa zväčší a naopak pre číslo väčšie ako priemer. Najmenšie z čísel nemôže byť väčšie ako priemer všetkých čísel a naopak najväčšie z čísel nemôže byť menšie ako priemer. Skús si každé z týchto piatich tvrdení ukázať.

Ak teda z 33 štvrtí vynecháme jednu najmenšiu štvrť, v ktorej je počet úkrytov určite menší alebo rovný priemeru počtu úkrytov vo všetkých štvrtiach, priemer zvyšných 32 štvrtí ostane rovnaký alebo sa zväčší. Opäť vynecháme najmenšiu z týchto 32 štvrtí a priemer vo zvyšných sa nezmenší. Takto budeme pokračovať vo vynechávaní najmenších častí, až dostane 20 najväčších, v ktorých sa od začiatku priemer nezmenšil. Tým sme ukázali tvrdenie, že v 20 najväčších štvrtiach je priemerne aspoň toľko úkrytov, čo vo všetkých 33 štvrtiach.

Bodovanie:

Za ukázanie pre rovnomerné rozloženie ste mohli získať najviac 1 b. Bodovanie bolo nasledovné: za myšlienku, že sa vždy oplatí vyberať najväčších 20 štvrtí - 0,5 b.

Ak ste postupovali 1. spôsobom, za ukázanie, že: v najmenšej štvrti v 20 najväčších môže byť najviac 13 úkrytov – 1b.; v najväčšej štvrti v 13 najmenších musí byť aspoň 14 úkrytov – 1b.; za spojenie týchto dvoch tvrdení a vysvetlenie, prečo z toho vyplýva, že sa to vždy dá – 2,5b.

Ak ste postupovali 2. spôsobom: za ukázanie, že priemer počtu úkrytov v 20 najväčších štvrtiach je viac ako priemer vo všetkých štvrtiach – 1b.; za popis a správne využitie tohto tvrdenia – 3,5b.