Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

36. ročník www.pikomat.sk školský rok 2018/2019

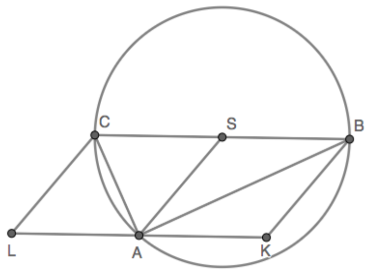
Vzorové riešenia 2. série letnej časti, kategória 8–9

Úloha S1: Čiary – *Opravovala Marianna Hronská*

Pri trojuholníku *ABC* si robotníci označili priamku rovnobežnú s *BC* prechádzajúcu cez bod *A* ako priamku *p*. Na priamke *p* zvolili bod *K* tak, že |*AK*| = |*BK*|. Ďalej na priamke *p* vyznačili bod *L* tak, že |*AL*| = |*CL*|. Tréner chcel, aby priamky *BK* a *CL* boli rovnobežné. **Aký uhol mali zvierať priamky *AB* a *AC*?**

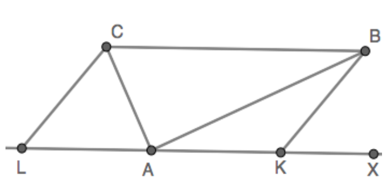
Poďme sa pozrieť na dva spôsoby, akými sa úloha dala riešiť.

Zo zadania vieme, že úsečky |BK| a |CL| sú rovnobežné a taktiež úsečky |LK| a |CB| sú rovnobežné. To znamená, že nám vznikol rovnobežník BCLK. Tým, že BCLK je rovnobežník, môžeme tvrdiť, že |CB|=|LK| a |BK|=|CL|. Ďalej vieme, že |AK|=|KB| a |AL|=|CL|. Z tohto celého nám vyplýva, že aj |AL|=|AK|. Keď sa teda pozrieme na obrázok, tak zbadáme, že bod A je v strede úsečky LK.



Spravíme si priamku, ktorá je rovnobežná s |BK| a |CL|, a prechádza bodom A. Bod, v ktorom sa priamka pretla s úsečkou |CB|, nazveme S, pričom |AL|=|CS| a teda aj |AK|=|BS|. Teda úsečky CS, BS, LA, AK a AS majú všetky rovnakú dĺžku. Keďže máme úsečky AS, BS a CS, ktoré sú všetky rovnako veľké, tak vieme spraviť kružnicu so stredom v bode S a prechádzajúcou cez body A, B a C. Úsečka |CB| je priemer našej kružnice, takže podľa Tálesovej vety, môžeme spokojne povedať, že uhol BAC=90°.

Druhý spôsob, akým išlo vyriešiť túto úlohu, bol cez uhly. Označme si veľkosť uhla CLA ako α. Keďže |AL|=|CL|, tak vieme, že trojuholník ALC je rovnoramenný. To znamená, že zvyšné dva uhly v trojuholníku ALC, uhly LCA a LAC, budú rovnaké a budú mať veľkosť $\frac{180° - \alpha}{2}$. Ak chceme, aby |BK| a |CL| boli rovnobežné, tak potom je veľkosť uhla ALC rovnaká, ako veľkosť uhla BKX, pretože sú súhlasné. Bod X pritom leží na priamke p, ako na obrázku. Uhol AKB musí mať veľkosť $180° - \alpha$, pretože BKX a AKB sú susedné uhly. Tak isto, ako trojuholník ALC, aj trojuholník AKB je rovnoramenný, pretože |AK|=|KB|. Takže, jeho zvyšné uhly KAB a KBA majú veľkosť $\frac{\alpha}{2}$.



Všetky tri uhly pri bode A, musia dať dokopy 180°. Takže si to dajme do rovnosti:

$$LAC + BAC + KAB$$
$$\frac{180° - \alpha}{2} + BAC + \frac{\alpha}{2} = 180°$$
$$\frac{180°}{2} + BAC = 180°$$
$$90° + BAC = 180°$$
$$BAC = 90°$$

Bodovanie:

za dokázanie, že trojuholníky ALC a AKB sú rovnoramenné - 1b.; za ukázanie zhodností uhlov - 2b.; za dorátanie uhla BAC a správny výsledok - 2b. Ak ste urobil dôkaz len pre obdĺžnik, mohli ste získať maximálne 3b.

Úloha S2: Zapálená – *Opravoval Jakub Poljovka*

„Máme kôpku so 42 zápalkami. Hru hrajú dvaja hráči. Hráč, ktorý je na ťahu, zoberie buď jednu alebo dve zápalky. Hráč, ktorý zoberie poslednú zápalku, prehrá.“

a) **Ktorý hráč vie hrať tak, že *vždy* vyhrá? Ako má hrať?**

b) Existuje aj varianta hry s dvoma kôpkami po 42 zápalkách. V tomto prípade si hráč v každom ťahu môže vybrať, z ktorej kôpky zoberie jednu alebo dve zápalky. Ten, kto zoberie poslednú zápalku z poslednej kôpky, prehrá. **Ktorý hráč vie v tomto prípade hrať tak, že *vždy* vyhrá? Ako má hrať?**

V prvej časti úlohy ste mnohí rýchlo našli fungujúcu stratégiu, ako môže prvý hráč vyhrať. Na začiatku máme 42 zápaliek na kôpke a odoberieme 2 zápalky. Následne budeme naše ťahy robiť tak, aby sme spoločne so súperom odobrali presne 3 zápalky (čiže ak súper odoberie 1 zápalku, my odoberieme 2 a ak súper odoberie 2 zápalky, my odoberieme 1). Poďme si ukázať, prečo takáto stratégia určite bude fungovať. Pokiaľ sa nám podarí súpera dostať do pozície, kde na kôpke je len 1 zápalka, súper ju musí odobrať a teda prehrá. Po našom prvom ťahu je na kôpke 40 zápaliek, čo je číslo, ktoré po delení tromi dáva zvyšok 1. V každom ďalšom ťahu sme hrali tak, že keď je súper opäť na ťahu, počet zápaliek klesol o 3. Zvyšok po delení tromi sa teda na začiatku súperovho kola nikdy nemení. Teda na súperových ťahoch je na kôpke postupne 40, 37, 34, 31, 28, ..., 7, 4 až napokon len 1 zápalka. Tú si súper bude musieť zobrať, čím prehrá.

Ak máme dve kôpky po 42 zápaliek, čiže spolu 84 zápaliek, môžeme uvažovať podobne, ako v prvej časti. Otázkou je, či dokážeme znova vždy dostať súpera do pozície, kedy bude musieť odobrať poslednú zápalku. Postupovať však môžeme rovnako ako minule. V prvom kole zoberieme z ľubovoľnej kôpky 2 zápalky. Ak súper odoberie 1 zápalku, my odoberieme 2 a ak súper odoberie 2 zápalky, my odoberieme 1, pričom nám nutne ani nemusí záležať, z ktorej kôpky odoberáme. Tento postup by nám mohol zlyhať iba v prípade, keď súper v niektorom ťahu odobral iba 1 zápalku a my už nedokážeme odobrať zo žiadnej kôpky 2 zápalky. To však môže nastať iba v dvoch prípadoch. Buď máme na jednej kôpke 1 zápalku a na druhej 0, alebo máme na oboch kôpkach po jednej zápalke. V prvom prípade by to znamenalo, že súper odoberal zápalku v stave, keď boli na kôpkach celkovo len 2 zápalky. V druhom prípade by to znamenalo, že súper odoberal zápalku v stave, keď boli na kôpkach celkovo len 3 zápalky.

My sme už však povedali, že vieme súpera udržiavať v stavoch, keď bude celkový počet zápaliek dávať zvyšok 1 po delení tromi. Čísla 2 a 3 ale tento predpoklad nespĺňajú, a teda náš súper sa určite nevedel do takéhoto stavu dostať. Tým sme jednoznačne ukázali, že stratégia ktorú sme použili v prvej otázke nám bude fungovať aj tu. Na začiatku nám teda stačí odobrať 2 zápalky, a potom už len odoberať zápalky tak, aby sme spoločne so súperom odobrali v každom ťahu celkovo 3 zápalky, čím budeme súpera udržiavať v stavoch, kedy počet zápaliek na kôpkach dáva zvyšok 1 po delení tromi.

Bodovanie:

za nájdenie funkčnej stratégie v časti a.) – 2b.; za odôvodnenie funkčnosti tejto stratégie – 1b.; za nájdenie funkčnej stratégie v časti b.) – 1b.; za odôvodnenie funkčnosti tejto stratégie – 1b.

Úloha S3: Na nástenke – *Opravovala Timea Szöllősová*

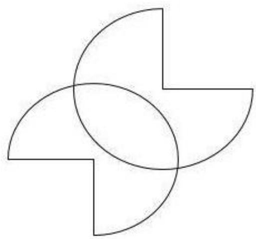
Rovinný útvar sa nazýva konvexným, keď pre každé dva body, ktoré obsahuje, obsahuje aj úsečku, ktorá ich spája. Nájdi a nakresli:

1. Dva nekonvexné útvary, ktorých prienik je konvexný.
2. Dva konvexné útvary, ktorých prienik je nekonvexný.
3. Tri útvary také, že prienik každých dvoch z nich je nekonvexný, ale prienik všetkých troch je konvexný.
4. Tri útvary také, že prienik každých dvoch z nich je konvexný, ale prienik všetkých troch je nekonvexný.

Nájdi a nakresli všetky dané útvary alebo dokáž, že sa nakresliť nedajú. Poznámka: Vo všetkých prípadoch musia mať všetky prieniky nenulový obsah.

Príklady konvexných útvarov   Príklady nekonvexných útvarov

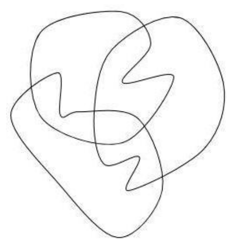
1. Riešenie tejto podúlohy ste mali všetci, čo ste ju odovzdali, správne ☺. Dala sa vyriešiť napríklad tak, ako na obrázku 1.



Obr. 1

2. V tejto podúlohe riešenie neexistuje, tak si poďme ukázať prečo je to tak. Z definície konvexného útvaru vieme, že keď v ňom spojíme ľubovoľné dva body úsečkou tak sa celá bude nachádzať v tomto útvare. Predstavme si, že by však existoval nekonvexný prienik dvoch konvexných útvarov. Takže v prieniku vieme nájsť také dva body, ktoré keď spojíme úsečkou tak nebude celá vnútri tohto prieniku. My však vieme, že táto úsečka bude určite vnútri oboch týchto útvaroch a teda bude aj v ich prieniku. To znamená, že prienik nemôže byť konvexný.

3. Rovnako ako prvá podúloha, aj táto podúloha sa dala nakresliť, napríklad tak, ako na obrázku 2.



Obr. 2

4. Pozrime sa na prieniky dvojíc útvarov. Keď teraz vezmeme prienik dvoch z týchto prienikov, dostaneme spoločný prienik všetkých troch útvarov (zamyslite sa nad tým, prečo je jedno, ktorú dva prieniky si vyberieme). Prieniky dvojíc útvarov majú byť všetky konvexné, prienik trochu útvarov nekonvexný. Takže tu máme vlastne rovnakú úlohu ako v druhej podúlohe – chceme z dvoch konvexných útvarov dostať nekonvexný prienik. My už však vieme, že sa to nedá.

Bodovanie:

za správne riešenie prvej podúlohy – 1b.; za správne riešenie druhej podúlohy – 2b.; za správne riešenie tretej podúlohy – 1b.; za správne riešenie štvrtej podúlohy – 1b.

Poznámka:

Mnohým som musela strhávať body v druhej podúlohe za to, že ste sa opierali o "definíciu" konvexného útvaru pomocou uhlov. Táto "definícia" je bohužiaľ nesprávna, ako totiž môžete vidieť v obrázku k tretej podúlohe, nie všetkým útvarom vieme zistiť uhly. Avšak tieto útvary môžu byť tiež konvexné a nekonvexné. Preto sa používa definícia pomocou dvoch bodov a úsečky, ktorá ich spája, ktorú sme Vám napísali aj do zadania ;)

Úloha S4: Doprava – *Opravoval Juraj Pavlovič*

Asistent objednal 1500 perníkov, no objednal ich v meste vzdialenom 500 km. Odtiaľ mu ich majú doviezť v dodávke, ktorá uvezie naraz len 500 perníkov. Navyše mal šofér podmienku, že cestou *po* každom prejdenom kilometri zje jeden perník. Šoférovi nesmú nikdy popri ceste dôjsť perníky, ináč by zastal a nikam ďalej by už nešiel. **Koľko *najviac celých* perníkov mohol šofér doviezť asistentovi?** Poznámka: Šofér si môže nechávať perníky odložené popri ceste. Taktiež nezabudni, že aj keď sa šofér vracia po perníky, stále musí zjesť jeden perník po každom prejdenom kilometri. Po odvezení perníkov do cieľa sa šofér už nevracia, ale ostáva v cieli.

Začneme predpokladom, že nechceme, aby nejaký perník vyšiel na zmar – ostal na štarte či pohodený niekde po ceste. Aby sme do cieľa doviezli čo najviac perníkov, je jasné, že sa musíme snažiť, aby ich šofér čo najmenej pojedol, a teda aby najazdil čo najmenej kilometrov.

Auto unesie maximálne 500 perníkov. Takže pohnúť kopu 1500 perníkov zo štartu sa dá jedine na 3 alebo viac jázd (ale viac nechceme). Tri jazdy ale znamenajú ísť *tam-späť-tam-späť-tam*, takže vlastne danú vzdialenosť treba prejsť 5-krát – a najmä za ňu 5-krát „zaplatiť" perníkmi pre šoféra. V číslach: **za každý kilometer**, o ktorý chceme presunúť celú kopu, musíme **zaplatiť 5 perníkov**. Pritom je jedno, či šofér pôjde napríklad 20-kilometrový úsek 5-krát celý, alebo či prejde 5-krát prvý kilometer, potom 5-krát druhý kilometer, potom 5-krát tretí, atď. (vyskúšaj a ľahko si to overíš).

Ako ďaleko bude potrebné prevážať perníky takýmto spôsobom? Nuž vychádzali sme z predpokladu, že na celú kopu sú potrebné až **tri** jazdy. Jazdením ale z kopy ubúda! Takže niekedy nastane moment, že perníkov bude už iba 1000 a my sa potešíme, lebo od tohto momentu je zjavne výhodnejšie už na prepravu celej kopy používať len **dve** jazdy. Otázka: Kedy nám ostane presne 1000 perníkov? No predsa keď šofér zje presne 500 perníkov. Kedy zje presne 500 perníkov? No predsa **keď najazdí <u>dokopy</u> 500 km**. Kedy najazdí presne 500 km? No predsa keď 5-krát prejde trasu 100 km (*tam-späť-tam-späť-tam*).

Sme 100 km od štartu, máme pri sebe presne 1000 perníkov. Meníme štýl jazdy. Kým doteraz sme kopu museli prevážať vždy na 3 jazdy, a teda každý kilometer prejsť až 5-krát, teraz už budeme schopní celú kopu presunúť na 2 jazdy, a teda každý ďalší kilometer stačí prejsť 3-krát. A tým pádom, pravdaže, musíme **za každý prejdený kilometer „zaplatiť" šoférovi 3 perníky**. Nasleduje tá istá úvaha: Dokedy potrvá tento stav? Nuž dovtedy, kým máme tak veľkú kopu, že na ňu treba 2 jazdy. Takže dovtedy, dokým z kopy ubudne ďalších 500 perníkov. Takže dovtedy, **dokým najazdíme presne 500 km**. Teraz ale už jazdíme štýlom *tam-späť-tam*, takže sa pýtame: akú vzdialenosť keď prejdeme 3-krát, bude to dokopy 500 km? Jasná odpoveď je 500/3 = 166,66 km (celkom presne: 166 a dve tretiny kilometra). Nezľaknime sa desatinného čísla – šoférovi nič nebráni vyložiť celočíselný počet perníkov aj na „neceločíselnom" kilometri. Stále ostáva pravdou, že túto vzdialenosť 166,66 km bude treba prejsť presne 3-krát, čím sa najazdí dokopy <u>presne</u> 500 km.

Sme 266,66 km od štartu a máme pri sebe presne 500 perníkov. Nedá sa robiť nič iné, iba ich naložiť a dôjsť do cieľa trasu dlhú 500-266,66 = **233,33 km** (celkom presne: 233 a jedna tretina kilometra). Na záver jedno veľké „Pozor": Zadanie špeciálne zdôrazňuje, že šofér vždy zje jeden celý perník ***<u>po</u>*** každom prejdenom kilometri. Koľko <u>celých</u> kilometrov prejde na trase 233,33 km? Predsa 233. Takže z posledných 500 perníkov už ubudne iba 233 a **objednávateľovi ostane 500-233 = 267 perníkov.** Šofér síce za poslednú tretinu kilometra takpovediac „nedostane zaplatené", ale popri tých 1233 perníkoch, ktoré už schrúmal, by mu to nemalo príliš vadiť.

<u>Bodovanie</u>:
výsledok 200 – 0,5b.; výsledok 222 – 1b.; výsledok 250 – 1,5b.; výsledok 266 – 2,5b.; výsledok 267 – 3b.; okrem výsledku sa dali získať 2b. za postup nasledovne: popis jednotlivých presunov / jázd – 1b.; všeobecný argument o tom, prečo robíme také jazdy, aké robíme – 1b.

Úloha S5: Tabuľka – *Opravovali Miroslav Macko a Martin Starovič*

V tabuľke 8 × 8 boli napísané čísla 1, 2, 3, …, 64, každé práve raz. Boli napísané tak, že:
- v každom riadku sa napísané čísla zvyšovali zľava doprava,
- v každom stĺpci sa napísané čísla zvyšovali zhora dole.

Dokáž, že súčet ôsmich čísel zapísaných v tabuľke na uhlopriečke zľava hore → doprava dole, bol aspoň 204. Dokáž tiež, že súčet ôsmich čísel zapísaných v tabuľke na uhlopriečke zľava dole → doprava hore, bol aspoň 120.

V prvej časti si najprv treba uvedomiť, že pri tabuľke 8x8 musí byť v ľavom hornom rohu najmenšie číslo, teda 1, pretože musí byť menšie od ľubovoľného iného čísla v tabuľke. V pravom dolnom rohu musí byť zase najväčšie číslo, teda 64, lebo to musí byť väčšie od každého iného čísla v tabuľke. Toto vieme aplikovať aj na menšie tabuľky/štvorce. Tak si rozdelíme tabuľku 8x8 na menšie štvorce. Začneme prvým číslom na uhlopriečke vľavo hore, teda štvorcom 1x1, jeho minimálna hodnota musí byť 1. Vezmime si teraz štvorec 2x2 s tým, že vľavo hore bude číslo 1. Tým pádom v pravom dolnom rohu tohto štvorca musí byť aspoň číslo 4, lebo aj číslo nad ním aj číslo naľavo od neho musí byť menšie. Teda ďalšie najmenšie číslo na tejto uhlopriečke bude 4. Takto budeme postupne pokračovať pri štvorcoch 3x3, 4x4 až po 8x8, kde dostaneme postupne najmenšie hodnoty 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64. Ich súčet je prekvapivo 204, čo je najnižší možný súčet čísel na uhlopriečke zľava hore doprava dole.

V druhej časti si môžeme zapísať vzdialenosť medzi ľavým horným rohom a pravým horným rohom ako rozmery obdĺžnika, teda v tomto prípade 1x8. Zo zadania vieme, že vpravo hore musí byť najväčšie číslo, takže tam musí byť aspoň 8. Vzdialenosť medzi ďalším políčkom na uhlopriečke a pravým horným rohom si tiež môžeme zapísať ako rozmery obdĺžnika, teda 2x7. Zistili sme, že druhé číslo na uhlopriečke (sprava hore doľava dole) musí byť aspoň 14. Analogicky budeme postupovať pri zisťovaní ďalších najmenších možných čísel na uhlopriečke pomocou obdĺžnikov: 1x8=**8**, 2x7=**14**, 3x6=**18**, 4x5=**20**, 5x4=2**0**, 6x3=**18**, 7x2=**14**, 8x1=**8**.

Súčet týchto čísel je 120. Všetky čísla sa nám tam ale opakujú (práve raz), takže ten súčet musí byť dokonca väčší ako 120. Zistením najmenších možných čísel na uhlopriečke sme teda zistili aj ich najmenší možný súčet, takže sme vlastne dokázali, že ich súčet musí byť aspoň 120.

Bodovanie:
Prvá časť: za úvahu o najväčšom a najmenšom čísle v rohoch tabuľky – 1b.; za aplikovanie tejto úvahy na štvorce 2x2, 3x3... – 1b.; za kompletné ukázanie, že súčet čísel na uhlopriečke musí byť aspoň 204 – 1b.
Druhá časť: za nájdenie obdĺžnikov 1x8, 2x7... – 1b.; za kompletné ukázanie, že súčet čísel na uhlopriečke musí byť aspoň 120 – 1b.