Príklad S5: Numerológia. *Opravoval Peter „Comp“ Ambrož.*

Poďme nájsť najprv číslo *a*. Rozoberme si všetky prirodzené čísla podľa ich poslednej cifry. Mnohí budú súhlasiť, keď poviem, že čísla končiace jednou z cifier 0, 2, 4, 6, 8 sú deliteľné 2 a teda nemôžu byť prvočíslom. Hádaj sa so mnou, či je 0 prirodzená, či nie, ale 0+6=6 a to už nie je prvočíslom. Dvojka ako taká je síce prvočíslom, ale 2+6=8 a to tiež nevyhovuje. Mnohí taktiež budú súhlasiť, že čísla končiace cifrou 5 sú deliteľné 5 a s výnimkou čísla 5 sú to teda všetko zložené čísla (nie prvočísla).

Čo nám ostalo, sú čísla končiace jednou z cifier 1, 3, 7, 9. Niektoré z nich môžu byť prvočísla, iné zasa nie, ale to tu skúmať nepotrebujeme. Zamerajme sa na to, čo sa stane, keď ku číslu končiacemu na 1 pripočítame 24. Dostaneme číslo končiace 5-kou – nevyhovuje. Ak *a* končí na 3, tak *a*+12 končí na 5 – nevyhovuje. Ak *a* končí na 7, tak *a*+18 končí na 5 – nevyhovuje. Obdobne ak *a* končí cifrou 9, tak *a*+6 končí 5-kou – zase nič. Vo všetkých prípadoch sme dostali číslo končiace 5, ktoré je väčšie ako 5, a teda je zloženým číslom.

Jediná výnimka nesúca sa celým doterajším postupom je *a*=5. Je to jediné prvočíslo končiace 5-kou. Skočíme po ňom teda ako po stratenej stovke ležiacej na chodníku pred nami a ihneď skúsime, či sa z neho dá vytvoriť vyhovujúca pätica. Dostávame (5, 11, 17, 23, 29) a jasáme blahom, lebo sú to všetko prvočísla. Máme prvé riešenie úlohy. Predošlý postup nám navyše zaručuje, že je to jediné riešenie, a preto môžeme pokojne spávať.

Bodovanie:

Riešenie a postup, ktorý vylúči ďalšie riešenia (bez skúšania všetkých čísel jedného za druhým) – 5b.; nejasnosť v postupe – 4,5b.; postup, ktorý nebol dotiahnutý do konca – 3 až 3,5b.; objavenie riešenia a neúnavné skúšanie niekoľkých ďalších prvočísel – 1,5 až 2b.; objavenie riešenia a čestné prehlásenie, že je to jediné riešenie – 1b.

Pikomat bol podporovaný Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy č. LPP-0007-06.

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

podporuje odborný rast organizátorov seminára

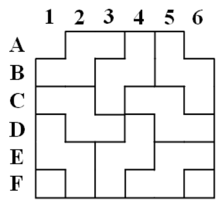
PIKOMAT

Vzorové riešenia 1. série letnej časti, kategória 7-9

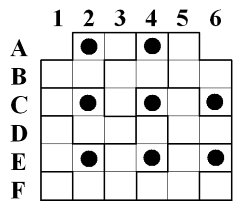
Príklad S1: Loďky. *Opravoval Martin „Panda“ Svetlík.*

S potešením konštatujem, že väčšina z vás našla najvýhodnejšie umiestnenie striel a ich zrátaním potom prišla aj na ich počet. S ukázaním, že na menej striel to nejde, to až také slávne nebolo. A pritom sa dalo začať práve týmto dôkazom.

Hrací plán má 34 políčok, lodička 4. Takže by sa malo dať umiestniť na plán 8 lodičiek bez toho, aby sa prekrývali a ešte 2 políčka ostanú voľné. A naozaj, ide to (napríklad ako na obrázku). Na čo je to dobré? Na pláne je 8 možných umiestnení lodičky, takže aby sme mali istotu, že sme trafili náhodne umiestnenú lodičku, musíme strelami pokryť minimálne týchto 8 umiestnení. Teda potrebujeme aspoň 8 striel (**keby sme dali len 7 striel, tak aspoň jedna z týchto 8 lodičiek na pláne určite ostane nezasiahnutá**).



Menej ako 8 striel to nebude. Stačí nám ale 8 striel? Skúsme nájsť nejaké vhodné rozmiestnenie striel. Do spodného riadku sa nám strieľať neoplatí, pretože ak by bola Karolínina loďka v spodnom riadku (akokoľvek otočená), určite by mala 2 políčka aj v riadku druhom od spodu. Strelíme teda na E2, E4, E6 (strieľať bližšie k sebe nemá zmysel, strieľať ďalej od seba nemôžeme, lebo by sa tam objavilo miesto na loďku). Do riadku D zase strieľať nebudeme (nechceme plytvať strelami), ale do riadku C už musíme – nemôžeme nechať dva riadky voľné, tam by sa zmestilo tóóóľko lodičiek. V riadku C strelíme na polia C2, C4 a C6 – opäť: bližšie k sebe sa neoplatí, ďalej od seba nemôžeme. Zatiaľ to vyzerá tak, že ak nechávame 1 políčko medzeru v riadku aj v stĺpci, tak to vychádza. Takže skúsime streliť aj do A2 a A4. Všimnite si, že každú z tých lodičiek, ktoré sme si na začiatku nakreslili do plánu, sme zasiahli práve raz. Ešte skontrolujeme, či sa tam naozaj žiadna iná loďka nevojde. Nevojde! Rovnako dobré rozloženie striel je aj A3, A5, C1, C3, C5, E1, E3, E5 (znova: každú loďku nakreslenú v obrázku by som zasiahol práve raz).

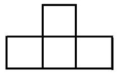


Bodovanie:

Akýkoľvek systém v strieľaní (teda nie „náhodne“ ani postupne A2,A3,A4,...) – 1b.; účinnosť a vysvetlenie systému – 3b.; správny systém posunutý o jeden riadok (strieľali ste do riadkov B,D,F) – mínus 0,5b.; dôkaz, že na menej to nejde – 1b.

Poznámka:

Mnohí z vás napísali niečo ako „keďže má lodička šírku 2, stačí strieľať do každého druhého riadku a stĺpca“. To nie je úplne dobré (aj keď v tomto prípade tak strieľať stačí), lebo aj takáto lodička (obr.) má šírku 2, ale pri nej by toto rozloženie striel nefungovalo. Ale to už je iný príklad.



Príklad S2: Remeselníci. *Opravovala Veronika „Nika“ Jankovičová.*

V tomto príklade máme 4 remeselníkov – volajú sa Kováč, Tesár, Murár a Pekár, a štyri remeslá – kováč, tesár, murár a pekár. Vieme, že ani jeden z remeselníkov nemá remeslo rovnaké ako meno. Každý z nich povedal deťom jednu vetu, ktorá mohla byť pravdivá alebo nepravdivá. Vašou úlohou bolo zistiť, pri akom počte nepravdivých viet existuje najviac možných priradení mien k remeslám. Priradenie znamená, že ku každému menu bude priradené práve jedno remeslo (remeslo sa nesmie zhodovať s menom a musia byť použité všetky remeslá).

Kvôli týmto podmienkam bolo najlepšie vypísať si všetky kombinácie klamárov. V nasledujúcich tabuľkách nájdete všetky tieto kombinácie (v tabuľke sú veľkými písmenami uvedené mená, malými písmenami sú uvedené remeslá. Znak „/“ znamená, že dotyčnému človeku možno priradiť obe povolania. (Zo zadania tiež vieme, že „nie všetci hovoria pravdu“, takže prípad s 0 klamármi nás nezujíma.)

1 klamár

Klame	p.Kováč	p.Tesár	p.Pekár	p.Murár	Možností
K	p	k	k/t	k/t	0
T	**m**	**p**	**t/k**	**k/t**	**2**
P	m	k	m	t/k	0
M	**m**	**k**	**t**	**p**	**1**
				Spolu	3

2 klamári

Klame	p.Kováč	p.Tesár	p.Pekár	p.Murár	Možností
K, T	**p**	**m**	**t/k**	**k/t**	**2**
K, P	**p**	**k**	**m**	**t**	**1**
K, M	t/p	k	m	t/k	0
T, P	m	p/m	m	t/k	0
T, M	m	p/m	t/k	p	0
P, M	m	k	m	p	0
				Spolu	3

3 klamári

Klame	p.Kováč	p.Tesár	p.Pekár	p.Murár	Možností
K, T, P	**t**	**p**	**m**	**k**	**1**
K, T, M	**t**	**m**	**k**	**p**	**1**
K, P, M	**t**	**k**	**m**	**p**	**1**
T, P, M	m	p/m	m	p	0
				Spolu	3

4 klamári

Klame	p.Kováč	p.Tesár	p.Pekár	p.Murár	Možností
K, T, P, M	t/p	p/m	m	p	0
				Spolu	0

Z tabuliek vidíme, že pri jednom, dvoch aj troch klamároch vznikne rovnaký počet možných priradení. Teda správna odpoveď na otázku zo zadania znie: *Aby možných priradení bolo čo najviac, klamať by mal **jeden, dvaja** alebo **traja** remeselníci.*

Bodovanie:

Niektorí z vás pochopili zadanie trochu inak a hľadali, „ktoré rozloženie klamárov má najviac možností priradenia“. I keď na to sme sa nepýtali, uznávali sme toto riešenie, ale maximálne za 4,5b. Takéto kombinácie sú dve: keď klame len pán Tesár a keď klamú spolu pán Tesár a pán Kováč. V oboch týchto prípadoch sú 2 možnosti. Za uvedenie len jednej z týchto 2 kombinácií boli 2b. Zvyšok podľa správnosti odpovede a postupu.

Príklad S3: Guľôčky. *Opravovala Mária „Marry“ Šormanová.*

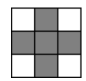
Pri tomto príklade bolo treba porozmýšľať, ako sa môžeme „zbaviť“ guľôčok jednej farby. Čiernej guličky sa vieme zbaviť tak, že vytiahneme jednu čiernu a jednu bielu – do klobúka vrátime bielu a čierna sa už doň nevráti, „zbavili“ sme sa jej. Alebo vytiahneme dve čierne – zbavili sme sa dvoch a následne sme tam jednu pridali z krabičky, takže v konečnom dôsledku sme sa zbavili jednej čiernej guličky. Bielych guľôčok sa vieme zbaviť len tak, že vytiahneme dve biele a pridáme jednu čiernu z krabičky (keď vytiahneme čiernu a bielu, bielu vrátime naspäť, takže s bielymi sa nič nezmenilo).

Vidíme, že čierne môžu ubúdať aj pribúdať po jednej. Preto by malo byť možné sa po istom počte ťahov prepracovať z 18 čiernych guľôčok aj na nula čiernych guľôčok. Zato biele možu ubúdať vždy iba po dvoch. Keďže je ich na začiatku 15 (nepárne číslo), pomocou odčítavania dvoch nie je možné prepracovať sa na nulu (párne číslo). Takže sa nám nikdy nepodarí zbaviť všetkých bielych guľôčok a preto musí na konci ako posledná zostať v klobúku tá jedna ***biela guľôčka***.

Bodovanie:

Úplne správne riešenie – 5b.; ostatné strhnutia sú napísané v riešení.

Príklad S4: (ne)Krajina. *Opravovala Jana Štolcová.*



Prvý rok zaplavilo krajinu tak ako na obrázku. Voda zabrala 5 z 9 štvorčekov, čo je $5/9$, súš tvorili 4 z deviatich štvorčekov, čo sú $4/9$ z celkovej plochy krajiny. V ďalšom roku voda spravila to isté na každom nezaplavenom úseku: zobrala z neho $5/9$ plochy a $4/9$ zostali suché. Druhý rok už ale súš tvorili iba $4/9$ pôvodnej plochy a záplavu prežili iba $4/9$ z nej, teda nezaplavené ostali $4/9$ zo $4/9$, čo je $4/9 * 4/9 = \left(4/9\right)^2$. Nasledujúci rok sa situácia zopakovala a voda nezabrala iba $4/9$ zo súše, čiže $4/9$ zo $4/9$ zo $4/9$, po tretích záplavách bolo teda v krajine $\left(4/9\right)^3$ suchej zeme.

Toto sa dialo po dobu piatich rokov, teda ešte dvakrát. Pevniny zostalo v krajine $\left(4/9\right)^5 = \frac{1024}{59049} \cong 0{,}0173 = 1{,}73\%$ z pôvodnej rozlohy krajiny.

Bodovanie:

Pochopenie systému zaplavovania a spočítanie aspoň „ostrovčekov“ – min. 3b.; nepresnosti v zdôvodnení výsledku – mínus 0,5b.