Bodovanie:

Nejasné, že 1023 je najmenší možný počet – mínus 1b.; nejasné, ako treba mosty stavať, aby to aj naozaj fungovalo (nestačí postaviť hocakých 1023 mostov) – mínus 1b.

Príklad S5: Poštová služba. *Opravovala Katarína „Katka“ Beláková.*

Aby sa vedel kronikár dobre rozhodnúť, musí najprv zistiť, aké výnosné sú jednotlivé cesty, teda aký je zisk z každej cesty vzhľadom na čas. Pre každú si vypočíta, koľko posol môže zarobiť, ak cestuje 900 minút (aby to vyšlo pekne). Za ten čas môže stihnúť buď 20 ciest do B so ziskom 2000 dukátov, alebo 9 ciest do C so ziskom 2250 dukátov. Vidíme, že **za daný čas (rovnaký pre obe mestá) je výhodnejšia cesta do C**. Takže sa budeme snažiť cestovať tam čo najviac a čas, ktorý nám ostane, vyplníme cestami do B. Pritom pamätáme na to, že posol má k dispozícii 16 hodín, čo je 960 minút.

C			B			Zárobok	Nevyužitý čas
Počet ciest	Trvanie	Zárobok	Počet ciest	Trvanie	Zárobok	2250	35 min
7	700 min	1750	5	225 min	500		

Ešte sme ale neskončili, pretože ďalším kritériom na to, aby sme dosiahli najvyšší zisk, je čo najlepšie využitie času. A pri 7 cestách do C nám zostane až 35 nevyužitých minút! Tak ešte skúsime znížiť počet ciest do C na 6.

C			B			Zárobok	Nevyužitý čas
Počet ciest	Trvanie	Zárobok	Počet ciest	Trvanie	Zárobok	2300	0
6	600 min	1500	8	360 min	800		

Tu vidíme, že čas je využitý úplne celý a zarobili sme viac než v prvom prípade. V tejto chvíli by sme ešte mohli počet ciest do C ďalej znižovať a vyskúšať tak úplne všetky možnosti, ale keď sa zamyslíme, zistíme, že to nie je potrebné. Čas už sa lepšie využiť nedá a keby sme cesty do C nahrádzali cestami do B, zisk by sa nám znižoval (už na začiatku sme zistili, že cesty do C sú výhodnejšie). Preto *kronikár rozhodol, že do Cifumpágu sa má uskutočniť 6 ciest a do Balbala 8 ciest denne*. Zisk bude 2300 dukátov, čo je najvyšší možný.

Niektorí z vás uvažovali aj nad tým, čo v prípade, že v daný deň nie je dostatok požiadaviek na doručenie. Ak je požiadaviek aspoň 6 do C a aspoň 8 do B, tak sa kronikár riadi tým, čo sme už vypočítali. Ak je niektorých požiadaviek menej, kronikár nechá posla vybaviť úplne všetky do C a tie, ktoré ešte stihne do B. Môžete sa o tom presvedčiť, ak si spravíte zopár tabuliek naviac.

Bodovanie:

Len výsledok – 1b.; zvyšok podľa miery zdôvodnenia a kompletnosti tabuliek.

Pikomat bol podporovaný Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy č. LPP-0007-06.

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

podporuje odborný rast organizátorov seminára

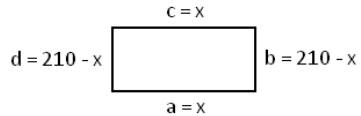
PIKOMAT

Vzorové riešenia 2. série letnej časti, kategória 7-9

Príklad S1: Kačičky. *Opravovala Veronika „Nika“ Jankovičová.*

Bolo treba vymyslieť rozmery nádvoria čo najlepšie, aby si Vendelín mohol oproti sebe zapísať čo najviac mien. Najprv si musíme uvedomiť dve veci:

1. Keď sa Vendelín posunie o jedno políčko, tí oproti nemu sa posunú tiež. Takže neuvidí mága tesne za tým, ktorého meno si zapísal na predchádzajúcom stanovišti, ale toho, ktorý stojí až o 2 miesta ďalej. Príklad: Vendelín si zapísal Aničku – za Aničkou stojí Boris a za ním Cyril. Potom sa Vendelín posunul, no už nevidel Borisa, ale Cyrila, lebo s Borisom sa „tesne minuli“. Takže *Vendelín si zapíše meno každého druhého mága*.
2. Po polovici stanovíšť (teda z pohľadu Vendelína na 211. stanovišti) sa všetci ocitnú akoby na tom istom mieste, kde začínali, len nádvorie bude obrátené o 180°. Takže Vendelín si začne zapisovať tie isté mená. Touto polovicou sa nemusíme ďalej zaoberať, lebo my chceme len zistiť, koľko *rôznych* mien si zapíše.



Strany si označíme *a, b, c, d.* Keď počet stanovíšť na strane *a* označíme *x*, potom počet stanovíšť na strane *b* bude *(210-x)* – pozri obrázok.

Keď Vendelín začína na strane *a* vľavo dole, tak kým príde na 210. stanovište, ktoré je vpravo hore na strane *b*, mal by si zapísať polovicu mien, čiže 210. Žiaľ, také jednoduché to nie je. Počet zapísaných mien sa mení. Závisí to totiž od toho, aké dlhé sú strany *(210-x)*. Prečo? Pretože tých, ktorí sú na strane *d* – na začiatočnej pozícii vľavo od Vendelína (je ich tam presne 210-x) – tých Vendelín nikdy neuvidí. Takisto neuvidí ani rovnaký počet mágov (ďalších 210-x), ktorí sú pred ním, ale keďže „sa hráme“ len s polovicou obdĺžnika, odpočítame toto číslo od najväčšieho počtu možných zapísaných mien (210) len raz. Mágovia, ktorých Vendelín uvidí namiesto týchto mágov, budú tí, ktorých už raz videl.

Pozrime sa na to však pozornejšie: najväčší možný počet mágov, ktorých Vendelín uvidí, je 210; z toho počet mágov, ktorých určite nikdy neuvidí, je (210-x). Potom počet mágov, ktorých uvidí, je 210-(210-x)=x. Aké najväčšie číslo by sme mohli teda dosadiť za x? 210. Tak dostaneme obdĺžnik so stranami 0 a 210 stanovíšť. Rozmery budú 1m a 211m (aby na kratšej strane nebolo žiadne stanovište, no zároveň aby to ešte bolo nádvorie a nie úsečka). Takto si Vendelín zapíše až 210 mien. Túto možnosť sme nezakázali a mnohí z vás ju aj našli. Ak by sme ale chceli, aby kratšia strana mala aspoň 1 stanovište, Vendelín by si zapísal 209 mien (nezapísal by si len toho jedného tesne za sebou). Stanovíšť na jednotlivých stranách by bolo 209 a 1, čiže rozmery nádvoria by boli 210m a 2m. Obe možnosti sme vám uznali ako správne.

Bodovanie:

Neúplné vysvetlenie – mínus 1 až 3b.; drobné nedostatky – mínus 0,5 až 1b.

Príklad S2: Aféra. *Opravoval Martin „Panda“ Svetlík.*

Bol to ťažký príklad, tak poďme rovno na to. Ako prvé si všimneme, že nemáme zadaný počet príkladov, ktoré sa vyriešili dokopy. Pozrime sa, čo by sa stalo, keby všetci dokopy vyriešili čo najviac rôznych príkladov. Keby napríklad žiadni dvaja chlapci nevyriešili ten istý príklad, tak by nemohla platiť podmienka zo zadania, že pre každý pár CH+D existuje príklad, ktorý vyriešili obaja. Prečo? Lebo každé dievča vyriešilo najviac 6 príkladov. Takže aby mala s každým chlapcom nejaký spoločný, musí každý chlapec mať vyriešený aspoň jeden z tých jej 6 príkladov (prípadne z tých menej, ak ich vyriešila menej).

Ešte raz a pomaly. Zoberme si jedno dievča a predstavme si, že vyriešilo 6 rôznych príkladov. Každý chlapec tvorí s týmto dievčaťom dvojicu, ktorá musí mať spoločný príklad. Takže každý chlapec musí mať z tých jej 6 vyriešený aspoň jeden – spoločný. Keďže chlapcov je 21 a príkladov iba 6, niektoré musia byť vyriešené viackrát (viacerými chlapcami). Na základe tohto môžeme s istotou povedať, že *existuje aspoň jeden príklad, ktorý majú vyriešený aspoň 3 chlapci (dokonca aj aspoň 4, ale to nepotrebujeme)*. To isté inými slovami: *určite* ***existuje trojica chlapcov, ktorí vyriešili ten istý príklad***. Keby totiž taký príklad neexistoval, tak každý príklad by mohli vyriešiť najviac 2 chlapci a kvôli tým šiestim príkladom nášho dievčaťa by mohlo byť najviac 12 chlapcov. Úplne rovnako vieme dokázať, že ***existuje trojica dievčat, ktoré vyriešili ten istý príklad***.

Toto však nestačí. My musíme ukázať, že trojica chlapcov a trojica dievčat vyriešila jeden a ten istý príklad. Predstavme si tabuľku 21×21, kde riadky predstavujú chlapcov a stĺpce predstavujú dievčatá. Do každého políčka napíšeme číslo príkladu, ktorý má daná dvojica spoločný (ak majú spoločných viac, stačí jeden). Ak sa v jednom riadku nachádzajú aspoň 3 rovnaké čísla, znamená to, že daný chlapec vyriešil rovnaký príklad ako tie 3 (alebo viaceré) dievčatá. Takéto políčka zafarbíme na modro. Takže *ak je políčko* ***modré****, znamená to, že ten príklad vyriešili aspoň 3 dievčatá*.

A teraz pozor! Už sme si ukázali, že každý chlapec má aspoň jeden príklad vyriešený spolu s trojicou dievčat. Takže mu ostáva najviac 5 príkladov, ktoré nemá spoločné s trojicou dievčat, čiže ich má spoločné s najviac dvoma dievčatami – teda najviac 10 políčok v každom riadku je NEzafarbených na modro – ***aspoň 11 políčok v každom riadku je modrých***.

Úplne to isté spravíme pre stĺpce, iba tentokrát budeme zafarbovať na červeno. Takže to isté pre červenú: *ak je políčko* ***červené****, znamená to, že daný príklad vyriešili aspoň 3 chlapci*. Zároveň ***aspoň 11 políčok v každom stĺpci je červených***.

Políčok je dokopy 21×21 = 441. Z toho modrých je minimálne 21×11 = 231 a červených je tiež minimálne 231. Lenže to znamená, že niektoré políčka musia byť aj modré aj červené zároveň (2×231=462>441). A presne také políčka nám vyriešili príklad! Ako sme už vraveli, ak je políčko modré, vyriešili ten príklad aspoň 3 dievčatá a ak je červené, vyriešili ho aspoň 3 chlapci. Takže existenciou modročerveného políčka sme si ukázali, že *existuje príklad, ktorý vyriešili aspoň 3 chlapci a zároveň aspoň 3 dievčatá*.

Bodovanie:

Ťažký príklad, takže som nebol veľmi prísny.

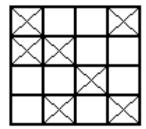
Príklad S3: Dlažba. *Opravoval Peter „Comp“ Ambrož.*

Pri hľadaní správneho riešenia nevyhnutne narazíme na dva problémy. Jednak ukázať, že nech sa budeme snažiť akokoľvek urputne, pre 6 a menej poškodených blokov je vždy možné vykonať opravu prekrytím pásmi dľa zadania. Druhak musíme presvedčiť okolie, že pre 7 rozbitých blokov už nemusí vždy vystať možnosť prekrytia.

Prvý problém, ten hodnotnejší, rozlúskneme úvahou. Akými spôsobomi je možné rozmiestniť 6 zlých blokov do poľa 4x4? Keďže sú k dispozícii 4 riadky, tak musia byť buď 2 také riadky, kde budú po 2 zlé bloky (4 sa umiestnia každý zvlášť a zvyšné 2 sa prisťahujú do niektorých obsadených riadkov), alebo sa môžu dostať 3 zlé bloky do 1 riadku, alebo aj 4 do jedného. Inak povedané: určite si viem vybrať 2 také riadky, že keď ich prekryjem (vodorovnými pásmi), tak tým opravím 4 bloky. Súhlasíme? No a potom mi v najhoršom prípade zostanú ešte 2 neprekryté bloky, ktoré ale určite viem prekryť dvoma zvislými pásmi. Toľko úvaha pre 6 zlých. Kto ju pochopil, vyhral.

Aby sme si boli úplne načistom, musíme sa presvedčiť, že aj pre menej ako 6 zlých to pôjde. Na toto si stačí uvedomiť, že keď to ide pre 6, tak odobratím ľubovoľného zlého bloku sa nám situácia nesťaží, ba naopak, možno sa zľahčí.

A teraz druhý problém – čerešnička na torte. Bude prekrývanie fungovať pre 7? Nebude! A celý problém zmetieme zo stola tým, že nájdeme aspoň jedno nevyhovujúce rozostavenie 7 zlých blokov. Možností je dostatok na vyberanie, za všetky uvádzam jednu (obr.1). Pre viac ako 7 sa opäť dovtípime, že keď existovalo problémové postavenie 7 blokov, tak pridaním ďalších sa situácia už len zhorší.

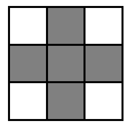


obr.1

Bodovanie:

1. časť (6 a menej ide vždy prekryť) – 3b.; 2. časť (7 a viac nejde vždy prekryť) – 2b.

Príklad S4: Mosty. *Opravovala Jana Štolcová.*



Zopakujeme si, ako sa krajina zaplavuje (obrázok). Po roku zostali 4 ostrovy súše. V ďalšom roku sa situácia zopakovala na každom kúsku pevniny – každý existujúci ostrov sa premenil na 4 menšie. Takže počet ostrovov sa každým rokom štvornásobí a teda po piatich rokoch pevninu tvorí $4^5 = 1024$ ostrovov.

My potrebujeme postaviť mosty tak, aby sme sa vedeli z každého ostrova dostať na každý iný. Začneme teda stavať mosty. Postavíme prvý most medzi niektorými dvoma ostrovmi. Ak sa na tieto dva chceme vedieť dostať z niektorého iného ostrova, musíme postaviť most medzi tým, ktorý chceme napojiť a niektorým z tých už pospájaných. Jedným mostom vieme ku „sieti“ už pospájaných ostrovov pripojiť jeden ostrov. Keď teda na jednom ostrove začneme, postupne k nemu (resp. k sieti narastajúcej okolo neho) musíme pripojiť zvyšných 1023 ostrovov. Ako sme už vraveli, na pripojenie jedného ostrova potrebujeme jeden most. *Postavíme 1023 mostov*.

Menej mostov stačiť nebude, pretože sme stavali iba vtedy, keď sme pripájali ostrov k skupinke (sieti) poprepájaných. Môžeme ich stavať trebárs rad radom. Začneme na jednom ostrove, postavíme most na ten 2., z 2. na 3., z 3. na 4. atď. Ak sa nikdy nevrátime na ostrov, na ktorom sme už boli, bude mostov presne 1023.