Bodovanie:

omyl v označení políčok za „párne“ a „nepárne“ (pozor: prvý hráč v prvom ťahu ťahá na druhé, teda párne, políčko) so správnym ďalším postupom, iba opačnou odpoveďou – mínus 1b.; predpoklad, že sa určite použije všetkých 64 políčok – max. 3b.;

Príklad S5: Hodiny. *Opravovala Janka Štolcová.*

Chceme počuť 700 úderov zvonov. Skúsme najprv spočítať, koľko úderov budeme počuť za 12 hodín, keďže každých 12 hodín sa situácia opakuje. Malý zvon udrie o štvrť jedenkrát, o pol dvakrát, o trištvrte trikrát a o celej hodine štyrikrát. Teda každú hodinu 10 úderov malého zvonu, za 12 hodín je to 10×12=*120 úderov malého zvonu*. Veľký zvon o každej celej hodine udrie príslušný počet ráz. Takže za 12 hodín počujeme 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = *78 úderov veľkého zvonu*. Spolu je to teda 120 + 78 = ***198** úderov za 12 hodín*.

Teraz si všimneme, že do 700 sa 12-hodinový interval zmestí trikrát, 3×198=594. Takže po 36 hodinách vysedávania pod vežou nám chýba už iba 106 úderov! Tu už záleží na tom, v akom konkrétnom čase budeme počúvať. Po 36 hodinách už nás to ale fakt nebaví, takže chceme počuť čo najviac úderov za málo času. Preto sa nám oplatí byť pod vežou čo najviackrát o 12. Po dvanástej nasleduje 1, čo je veľmi malé číslo (málo úderov), a tak je šikovné byť pod vežou práve do dvanástej – vypočujeme si zvony o 12. a odídeme (sa konečne vyspať). Pred 36 hodinami bolo 12, ale to odbíjanie sme do tých 594 úderov sme ešte nerátali. Takže by sme tam mali byť ešte trošku skôr.

Od 11. (bez zarátania odbíjania 4+11) do 12 zaznejú zvony **22-krát**. Od 10. do 11. je to 10+11=**21-krát**. Od 9. do 10. – 10+10=**20-krát**. Od 8. do 9. – 10+9=**19-krát**. Od 7. do 8. – 10+8=**18-krát**. Toto je spolu 100 úderov, ak prídeme o 7. a nezarátame odbíjanie 4+7. Akonáhle pripočítame týchto 7+4=11 úderov, prekročíme číslo 106. Takže pod hodinami musíme byť tesne pred 7. a odísť môžeme po vyše jeden a pol dni tesne po 12. Tým pádom tam musíme stráviť 5+36 = ***41 hodín***.

Bodovanie:

všetky strhnutia bodov sú odôvodnené priamo v riešení.

Pikomat bol podporovaný Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy č. LPP-0007-06.

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

podporuje odborný rast organizátorov seminára

PIKOMAT

Vzorové riešenia 3. série letnej časti, kategória 7-9

Príklad S1: Kniha. *Opravoval Peter „Comp“ Ambrož.*

V prvom rade zabudnite na všetky predsudky o nepárnych kôpkach, nepárnom počte kníh a o podobných nesúvisiacich veciach. Podstata tohto problému tkvie v deliteľnosti čísel. Na začiatok nemôžeme rozdeliť žiadnu kôpku a taktiež ich nemôžeme spojiť všetky 3, lebo by sme sa zabetónovali.

Máme teda 3 možnosti, ktoré 2 kôpky spojíme dokopy. Zvolíme si 49+51. Dostaneme 2 kôpky po 100 a 5 kníh. Stop! Žiadne ďalšie rozdeľovanie ani spájanie. Ideme sa zamyslieť a príklad riešiť „od konca” – k čomu sa vlastne chceme dopracovať? Kôpky veľkosti 1. Ako ich dostaneme? Jedine rozpolením dvojice. A tú ako dostaneme? Rozpolením 4 kníh. A tie zasa rozpolením 8 kníh. Takto môžeme pokračovať mocninami 2-ky. Takéto počty sa dajú dosiahnuť aj spojením nejakých kôpok. O čo však ide, je spásna predstava, že *ak niekedy počas nezáživného spájania a delenia kôpok prídeme k počtu 2, 4, 8, 16, 32 alebo 64, máme istotu získania nejakých jednotiek*.

Život je však krutý, zviaže ti ruky a na tieto magické počty kníh jednoducho nemáme šancu naraziť. Keď sa totiž vrátime na začiatok ku kôpkam 100 a 5, zbadáme, že oba počty sú deliteľné 5. Preto operácia spojenia kôpok nám vždy vráti kôpku deliteľnú 5. Navyše operácia rozdelenia kôpok nám tiež vráti obe kôpky deliteľné 5. Túto skutočnosť niektorí z vás postrehli. Čo s tým? No to, že delením a spájaním kôpok 100 a 5 budeme dostávať vždy len kôpky deliteľné 5. Žiadna z mocnín 2-ky nemá túto vlastnosť a preto sa ku žiadnej ani nedopracujeme.

Ešte ale nezúfame, lebo je tu neprebádaná možnosť začať so 49+5 a teda vychádzať z kôpok 54 a 51. Keď ich však zbadáme, chlpy sa nám už ježia, lebo obe sú deliteľné 3. Nech akokoľvek aplikujeme 2 povolené operácie, ostanú nám vždy len čísla deliteľné 3. A tak sa zasa ku 1-tke neprebojujeme. Naša posledná nádej zhasne, keď skúsime 51+5 a dostaneme kôpky 56, 49. Trénované oko už vidí, že sú deliteľné 7. Pozorný čitateľ už vie, kde je problém. Výsledok: ***nedá sa tieto 3 kôpky rozdeliť na 105 kôpok po 1 knihe.***

Bodovanie:

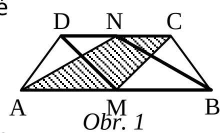
slabý postup – 1 až 2b.; nešťastníci, ktorí sa pomýlili v (takmer správnom) výpočte a vyhlásili, že to ide – 2.5b.; snaha o doklepnutie inak dobrého postupu, ale nevedeli ste presne povedať, prečo to nepôjde – 3b.; to isté, ak ste si navyše uvedomili, že je fajn dostať sa na mocninu 2-ky – 4b.; vysvetlenie, prečo to nemá riešenie – 5b.

Poznámky:

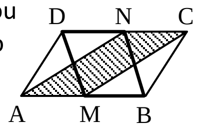
„Skúšal som to 2 hodiny a nešlo to!" nie je vysvetlenie. A pre tých, ktorí tvrdili, že problém bol len v nepárnosti vstupných čísel a ich súčtu, ponúkam upravené zadanie s kôpkami 49, 51 a 7 kníh, ktoré sa dajú bez problémov rozdeliť na 107 kôpok po 1.

Príklad S2: Kráľovský matematik. *Opravoval Martin „Panda" Svetlík.*

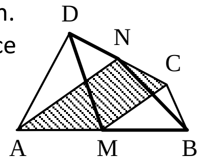
Príklad nebol ťažký, mnohí z vás našli jeden z dvoch dôkazov, ktoré tu spomeniem. Ale poďme pekne po poriadku. Ak máme dokázať, že niečo platí pre ľubovoľný štvoruholník, tak nestačí, že to dokážeme pre nejaké špeciálne prípady (ako rovnoramenný lichobežník, rovnobežník a pod.). Mohlo by nás to zviesť k niečomu, čo neplatí vždy (napríklad, že štvoruholníky AMCN a MBND – budem ich značiť jeden hrubou čiarou a jeden vyšrafovaný – sú zhodné, len zrkadlovo obrátené – obr.1; alebo že sú to rovnobežníky s rovnakou základňou i výškou – obr.2) V prípadoch na týchto obrázkoch to síce platí, ale neplatí to vždy. A tak nám stále ostáva dokázať to pre nepravidelný konvexný štvoruholník (obr. 3). Uvidíme, že dôkaz pre ten bude platiť aj v špeciálnych prípadoch.



Obr. 1



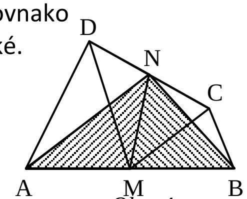
Obr. 2



Obr. 3

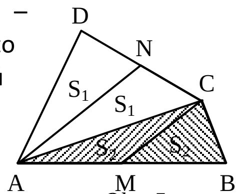
1. dôkaz: dokreslíme si úsečku MN. Teraz vidíme dve dvojice trojuholníkov s rovnakým obsahom – prvou je dvojica AMN a MBN (obr. 4). Majú rovnako dlhú jednu stranu |AM|=|MB| (keďže M je daný ako stred AB) a aj výška na túto stranu je rovnaká, keďže bod N majú oba trojuholníky spoločný. Môžme teda napísať, že $S_{AMN} = S_{MBN} = S_1$. Rovnako pre trojuholníky MND a MCN platí, že úsečky DN a NC sú rovnako dlhé a tretí vrchol, bod M, majú spoločný, takže aj výšky majú rovnaké. Preto aj $S_{MND} = S_{MCN} = S_2$. A teraz zrátame obsahy štvoruholníkov: $S_{AMCN} = S_{AMN} + S_{MCN} = S_1 + S_2$. $S_{MBND} = S_{MBN} + S_{MND} = S_1 + S_2$.

Aha, majú rovnaký obsah!



Obr. 4

2. dôkaz: dokreslíme si úsečku AC. Teraz máme celý štvoruholník ABCD rozdelený na 4 trojuholníky. Zase vidíme, že dva a dva z nich majú rovnaké obsahy (opäť ich označíme S_1 a S_2) – trojuholníky AMC a MBC majú rovnaké strany AM a MB aj výšku na tieto strany (spoločný vrchol C). Rovnako trojuholníky AND a ACN majú rovnaké strany ND a CN aj výšku na ne (spoločný vrchol A). Takže vieme vyjadriť obsah štvoruholníka ABCD aj AMCN: $S_{ABCD} = 2\times S_1 + 2\times S_2$, $S_{AMCN} = S_1 + S_2 = S_{ABCD}/2$. Teraz dokreslíme úsečku BD a rovnakým postupom si ukážeme, že $S_{ABCD} = 2\times S_3 + 2\times S_4$, $S_{MBND} = S_3 + S_4 = S_{ABCD}/2$. No a týmto sme dokázali nielen to, že naše dva štvoruholníky majú rovnaký obsah, ale dokonca aj to, že je to presne polovica obsahu pôvodného štvoruholníka ABCD.



Obr. 5

Bodovanie:

akýkoľvek všeobecný dôkaz – 5b.; nakreslenie, zmeranie a spočítanie obsahov konkrétnych štvoruholníkov – max. 2b.

Príklad S3: Karolínin problém. *Opravovala Alexandra „Saša" Porembová.*

Máme dve prvočísla, medzi ktorými sa nachádza práve šesť zložených čísel. To znamená, že druhé prvočíslo je o 7 väčšie ako prvé. Ďalej vieme, že všetky prvočísla (okrem dvojky) sú nepárne, pretože párne čísla majú okrem 1 a samého seba aj deliteľa 2. Prvé prvočíslo teda bude buď nepárne alebo to bude 2.

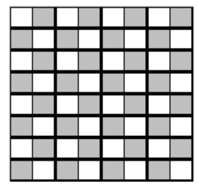
V prípade, že by to bolo ľubovoľné nepárne prvočíslo, tak po pripočítaní 7 (nepárneho čísla) by sme dostali párne číslo (nepárne + nepárne = párne). Vieme však, že párne prvočíslo okrem dvojky neexistuje a po pripočítaní 7 to už dvojka pochopiteľne byť nemôže. Teda táto možnosť nie je správna.

Ak by prvým prvočíslom bola dvojka, potom po pripočítaní 7 by druhé prvočíslo bolo 2+7=9, čo však, ako dobre vieme, prvočíslo nie je. Môžeme teda spokojne prehlásiť, že dvojica prvočísel, medzi ktorými sa bezprostredne nachádza šesť zložených čísel, ***neexistuje.***

Bodovanie:

správne riešenie s úplným zdôvodnením – 5b.; bez vysvetlenia, prečo to neplatí pre číslo 2 – mínus 0,5b.; hľadanie skúšaním – max. 2b.; odpoveď bez vysvetlenia alebo nesprávne riešenie – 0b.

Príklad S4: Bimbák. *Opravoval Michal „Mišo" Kováč.*



Pri tejto úlohe išlo o nájdenie stratégie pre niektorého hráča tak, aby sme vedeli, ako má ťahať, aby vždy vyhral. Pozrime sa na to takto. Šachovnica 8×8 políčok sa určite dá pokryť dominovými kockami (obdĺžnikmi s veľkosťou 2x1 štvorček šachovnice) tak, že žiadne dve sa neprekrývajú a celá šachovnica je pokrytá. Napríklad do každého riadku môžeme dať 4 dominové kocky. Každá dominová kocka obsahuje dve políčka, ktoré sú susedné, teda Bimbák sa jedným ťahom dokáže z jedného premiestniť na druhé.

Na začiatku je Bimbák v ľavom dolnom rohu. Tam sa nachádza aj jedna z dominových kociek. Druhé políčko tej kocky je vedľa neho a prvý hráč potiahne tam. Tým sa zablokovala celá dominová kocka – Bimbák sa na ňu nikdy nebude môcť vrátiť.

Druhý hráč má na výber, ale to nás nezaujíma, stačí vedieť, že určite potiahne na inú dominovú kocku, na ktorej Bimbák ešte nebol. Prvý hráč sa však opäť posunie iba na susedné políčko tej istej dominovej kocky. Takže po ľubovoľnom ťahu prvého hráča platí: *každá dominová kocka buď ešte nebola navštívená Bimbákom, alebo boli navštívené obidve jej políčka*. Zato po ľubovoľnom ťahu druhého hráča platí: *na dominovej kocke, kde je Bimbák, je druhé políčko voľné*.

Prvý hráč vždy môže spraviť ťah a teda ak bude niektorý hráč niekedy zablokovaný (najneskôr po prejdení všetkých políčok), bude to druhý hráč. ***Vyhrá prvý hráč.***