Príklad sa dal riešiť aj bez znalosti upravovania výrazov. Mohli ste rozobrať prípady, kedy je x párne a kedy je nepárne – výsledok bude vždy párny. Následne sa dajú rozobrať 3 prípady, kedy je x deliteľné tromi so zvyškom 0, 1 či 2. Vždy vyjde, že $x*x*x - x$ je deliteľné 3.

Poznámka pre tých, ktorí zatracovali možnosť $x = 1$. Holič si v tomto prípade z jedinej miestnosti na hrade vezme jedinú truhlicu a v nej jedinú mincu. Synom ostane *nič*. Toto je úplne v poriadku, lebo *nič* si rozdelia spravodlivo. Každý dostane rovnaké *nič*. V zadaní sa nehovorilo o tom, že by synovia mali dostať nejaké mince.

Bodovanie: správne riešenie aj postup – 5b.; bez možnosti x=1 – 4,8b.; ukázaná deliteľnosť pre iba jedno z čísel 2 a 3 – 3,5b.; vypísanie zopár konkrétnych príkladov, kedy to funguje a odpoveď, že to funguje vždy – 2,5b.; postup vedúci k nesprávnemu výsledku – 0,5 až 1,5b.;

Príklad S5: Lístky. *Opravovala Mária „Marry“ Šormanová.*

V tomto príklade ste mali nájsť najmenšie dve po sebe idúce čísla lístkov, pričom ciferný súčet oboch z nich je deliteľný 13. Bolo dôležité zamyslieť sa nad tým, ako by takéto čísla mali „vyzerať“, aby spĺňali podmienky. Aby boli oba ciferné súčty deliteľné 13, tak aj ich rozdiel (ciferných súčtov) musí byť deliteľný 13.

Ak by prvé číslo končilo na cifru inú ako 9, tak po zväčšení o jedna by sa aj jeho ciferný súčet zvýšil o jedna (všetky cifry ostanú nezmenené, iba posledná je o 1 väčšia). Čo ak bude ale prvé číslo končiť na nejaký (väčší) počet deviatok? Po zväčšení o jedna sa jeho ciferný súčet zmenší o súčet deviatok na konci čísla (premenia sa na nuly) a zväčší sa o jedna (cifra pred deviatkami sa zväčší o jedna). My potrebujeme nájsť taký počet deviatok, aby sa mi ciferný súčet zmenil o násobok 13. Vyskúšame najprv jednu deviatku, potom dve a tak ďalej. Hneď pri troch zistím, že $-3*9+1= -26$, čo je deliteľné 13. Takže vieme, že na konci prvého čísla budú tri deviatky. Keď ho zväčším o jedna, ciferný súčet sa mi zmenší o 26, takže aj ciferný súčet druhého čísla bude deliteľný 13 (ak ciferný súčet prvého bol).

Teraz už len pred 999 pripísať také cifry, aby číslo bolo čo najmenšie a zároveň ciferný súčet bol deliteľný 13. 9+9+9=27, najbližší väčší násobok 13 je 39. 39-27=12, takže potrebujem dopísať cifry, ktorých súčet je 12. Aby číslo bolo čo najmenšie, na miesto tisícok sa pokúsim dať čo najväčšiu cifru (potom na mieste 10-tisícok môže byť čo najmenšia). Cifra na mieste tisícok môže byť maximálne 8 (ďalšia deviatka by pokazila rozdiel ciferných súčtov deliteľný 13), tým pádom na mieste 10-tisícov bude (12-8=4) cifra 4. Čísla lístkov sú 48999 a 49000.

Bodovanie: správny výsledok – 3 až 5b. (podľa vysvetlenia);
úvaha o deviatke na konci čísla a nesprávny výsledok – 2b.;

Pikomat bol podporovaný Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy č. LPP-0007-06.

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

podporuje odborný rast organizátorov seminára

PIKOMAT, 27. ročník   šk. rok 2009/2010

PIKOMAT

Vzorové riešenia 3. série zimnej časti, kategória 7-9

Príklad S1: Krtko. *Opravovala Katarína „Katka“ Beláková.*

Veľkým problémom v tomto príklade bolo pochopenie zadania. Krtko má 100 nôr nejako pospájaných chodbičkami. Chce si pristavať jednu ďalšiu chodbičku (nazvime ju „Skratka“). Kde ju postaví? V sústave nôr a chodbičiek, ktorá prístavbou vznikne, si nájde najdlhšiu trasu. A práve táto má byť čo najkratšia – tomuto cieľu musí prispôsobiť umiestnenie Skratky. **Pozor! Najdlhšia cesta na začiatku nie je dôležitá. Nás zaujíma dĺžka najdlhšej cesty PO prístavbe.**

<u>Začiatočný stav: 100 nôr je pospájaných do kružnice</u>

Očíslujeme si nory od 1 do 100. Pri usporiadaní na kružnici sú od seba najvzdialenejšie tie nory, ktoré sú oproti sebe (napríklad 1 a 51). Cesta medzi nimi trvá vždy 50 minút.

Pridaním Skratky rozdelíme kružnicu na dva oblúky. Na oboch nájdeme nory, ktoré sú v strede oblúkov a nazveme ich „Špice“ (pri párnom počte nôr na oblúku môže Špic tvoriť aj dvojica susediacich nôr). Špice sú od Skratky vzdialené najviac, ako sa dá – vždy polovicu dĺžky oblúka. Aby sme prešli z jedného Špicu do druhého, musíme prejsť aspoň polovicu jedného oblúka a aspoň polovicu druhého oblúka, čo je spolu polovica celej pôvodnej kružnice. Skratka nám teda túto trasu nijako neurýchlila. Čiže nech pristavia krtko ďalšiu chodbičku kdekoľvek, vždy mu aspoň jedna najdlhšia trasa bude trvať rovnako dlho – 50 minút.

Poznámka: Je pravda, že spojením nôr oproti sebe sa krtkovi cestovanie všeobecne uľahčí, ale nás zaujíma len dĺžka JEDNEJ najdlhšej cesty. A tá ostane nezmenená.

<u>Začiatočný stav: 100 nôr v rade za sebou</u>

Je jasné, že pred prístavbou je najdlhšia trasa medzi najvzdialenejšími norami (1 a 100) a trvá 99 minút. Na to, aby sa skrátila, však nemusíme nutne spájať práve tieto dve nory (ako si mnohí z vás mysleli).

Označím si nory, ktoré spájam, A a B. Vznikne mi jeden uzavretý okruh a dva „Chvostíky“, ktoré trčia z A a B smerom k norám 1 a 100. Nora v strede medzi A a B bude tvoriť Špic (pri nepárnej vzdialenosti to opäť môže byť dvojica susediacich nôr).

Najdlhšia trasa, ktorá sa nám ponúka, bude od Špicu (lebo vtedy mi skratka nepomôže) po vzdialenejší koniec (1 alebo 100). Čiže polovica vzdialenosti medzi A a B (to je polovica okruhu) + dĺžka dlhšieho Chvostíka.

Keďže sa zarátava dlhší Chvostík a ja chcem vzdialenosť čo najmenšiu, je najvýhodnejšie, aby boli chvostíky rovnako dlhé (prípadne jeden z nich o 1 dlhší ako druhý), teda aby boli nory A a B usporiadané symetricky okolo stredu (50. alebo 51. nory). Najdlhšia cesta bude potom trvať 50 minút.

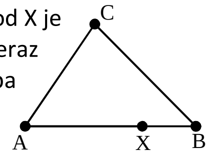
Treba si ešte dať pozor na jeden problém. Ak by boli A a B príliš blízko seba, Chvostíky budú veľmi dlhé a najdlhšia trasa môže byť opäť medzi norami 1 a 100, dlhá viac ako 50 minút. Aby sa nám to nestalo, súčet Chvostíkov môže byť maximálne 50 minút. Z toho vyplýva, že nory A a B musia byť od seba vzdialené aspoň 50 minút.

Čiže možné dvojice nôr pre vytvorenie Skratky sú dvojice, ktorých súčet je 100, 101 alebo 102 (to aby boli Chvostíky rovnako dlhé) a ich vzdialenosť od seba je aspoň 50 (to aby Chvostíky neboli príliš dlhé). Najdlhšia cesta bude vždy trvať 50 minút.

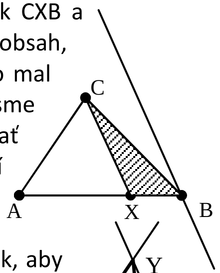
Bodovanie: úplne správne riešenie pre nory v rade za sebou - 2,5b.;
úplne správne riešenie pre nory na kružnici - 2,5b.;

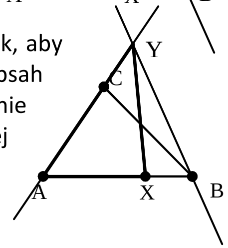
Príklad S2: Sen. *Opravoval Martin „Panda“ Svetlík.*

Bolo treba napísať postup, ako nájsť bod Y, keď máme daný trojuholník ABC a bod X. To, že trojuholník je *ľubovoľný*, znamená, že ten postup by mal platiť pre ľubovoľný trojuholník, nie len pre pravouhlý, rovnoramenný alebo nejaký iný špeciálny. To, že bod X je *daný*, znamená, že nemôžem v polovici postupu zahlásiť niečo ako „a teraz sem dám bod X tak, aby to vyšlo.“ Bod X je proste daný, čiže zase treba nájsť taký postup, ktorý platí, nech je bod X daný hocikde na priamke AB. Takže Janči s Gustom vidia na tabuli niečo takéto a musia nájsť bod Y.



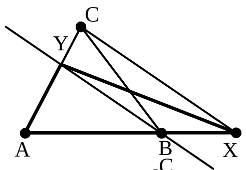
Skrátením strany AB na AX akoby sme odstránili celý trojuholník CXB a ostal nám len trojuholník AXC. Aby sme dostali naspäť pôvodný obsah, musíme k AXC pridať toľko, koľko sme ubrali, teda rovnaký obsah, ako mal trojuholník CXB. A najlepšie bude pridať to ku strane CX, keďže od nej sme „odkrojili“ ten trojuholník CXB. Ubratý a pridaný trojuholník budú mať spoločnú stranu CX. Na to, aby mali rovnaký obsah, nám už stačí zabezpečiť rovnakú výšku na túto stranu. Takže si spravíme rovnobežku s CX cez bod B. Ako? Nuž, keďže vieme rysovať kolmice, tak najprv spravíme kolmicu na CX a potom kolmicu na túto kolmicu tak, aby prechádzala cez bod B. Pre každý bod Y na tejto rovnobežke platí, že obsah CXY je rovnaký. Ktorý bod bude naším bodom Y? Ten, pri ktorom spojenie AXC a CXY bude trojuholník. Čiže body A, C a Y musia byť na jednej priamke. Tak si takúto priamku spravím (predĺžim úsečku AC) a kde sa pretne s našou rovnobežkou, tam je bod Y.





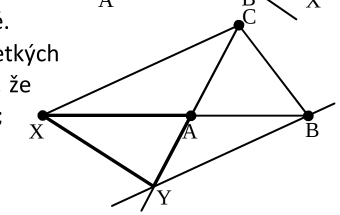
A ako to vyzerá, keď bod X nie je daný na úsečke AB?

(Keďže nevieme, kde na priamke je daný, musíme sa pozrieť aj na toto.) Postupujeme rovnako. Spojíme C a X a spravíme rovnobežku s touto úsečkou cez bod B. Tam, kde sa táto pretne s AC, tam je bod Y.



A na záver už len vetička, že keď takto zostrojeným bodom Y povedieme rovnobežku s AX, tak každý bod na tejto rovnobežke môže byť bodom Y, keďže strana AX aj výška na ňu ostanú zachované.

Bodovanie: spôsob vedúci k správnemu riešeniu pri všetkých polohách bodu X (napr. využitie podobnosti) – 4,5b.; ukázané, že naozaj funguje pre všetky 3 umiestnenia bodu X – 5b.; nedotiahnutá snaha o využitie podobnosti – 2 až 2,5b.; nefungujúci spôsob – max. 1b.;



Príklad S3: Kengury. *Opravovala Lucie „Klávesnica“ Křemenová.*

V tomto príklade bolo mimoriadne dôležité pozorné prečítanie a správne pochopenie zadania. Bolo treba si uvedomiť, že poradie skákania kengúr je už vopred dané (od najstaršej po najmladšiu). Tu niektorí z vás spravili prvú chybu. Ďalším častým omylom bolo, keď ste si mysleli, že skok jednej kengury je jeden meter.

Dôležitá bola veta v zadaní „Skočiť môžu **hocikam vo štvorci**, ale tak, aby **po dopade**, nech by sa pozerali **hociktorým smerom**, vždy videli **aspoň jednu** kenguru.“ Z tejto vety vyplýva, že kengura sa po doskočení poobzerá a v ten daný moment musí vidieť všade aspoň jednu inú kenguru. Vieme, že zorné pole kengury je 180°.

Máme štvorec a v každom rohu stojí jedna kengura. Prvá kengura musí doskočiť do trojuholníka tvoreného zvyšnými troma kengurami. Pretože keby neskočila do toho trojuholníka, mohla by sa otočiť tak, že by mala zvyšné tri za chrbtom – v jej zornom poli by nebola ani jedna kengura.

Nakreslíme si teda trojuholník medzi troma nezačínajúcimi kengurami. Prvá kengura skáče do tohto priestoru. Druhá skáče do trojuholníka vytvoreného ostatnými troma kengurami (1, 3, 4). Dôležité je, aby kengura, ktorá skáče, skočila do trojuholníka určeného neskáčucimi kengurami. Skočiť môže buď dovnútra alebo na jeho stranu. Kengury takto môžu skákať dovtedy, kým neporušia pravidlo o vzdialenosti jednej kengury od druhej (1m).

Teraz ešte treba prísť na to, aký skok je pre kengury najvýhodnejší. Aby mohli kengury skákať čo najdlhšie, budeme sa snažiť zachovávať čo najväčší trojuholník. Pri každom skoku treba myslieť na to, že práve vytvárame jeden vrchol „nasledujúceho“ trojuholníka. Tento „nasledujúci“ trojuholník bude tvorený kengurou, ktorá práve skáče a dvoma kengurami, ktoré ani v nasledujúcom kroku NEbudú skákať. Aby bol trojuholník čo najväčší, snažíme sa skočiť *čo najďalej* od tých dvoch, ktoré nebudú skákať ako ďalšie. Preto každý skok bude **čo najbližšie ku kengure, ktorá BUDE skákať ako ďalšia**.

Ak ste prišli na tento spôsob, vyšlo vám, že kengury môžu skočiť najviac 20krát.

Bodovanie: správny postup a výsledok líšiaci sa maximálne o 2 skoky od správneho – 5b.; skákanie do trojuholníka – min. 2,5b.; zlé pochopenie zadania – 0 až 1b.; všetko samozrejme podľa presnosti opísania postupu;

Príklad S4: Dedičstvo. *Opravoval Peter „Comp“ Ambrož.*

Každý správny hrad má kladný počet miestností, s tým budeme počítať. Ako **x** si môžeme označiť počet mincí v truhlici, počet truhlíc v miestnosti aj počet miestností na hrade. Takže x*x bude počet mincí v miestnosti a nakoniec x*x*x bude počet mincí na hrade. Jednu truhlicu mincí venujeme holičovi. Ostáva nám x*x*x - x mincí. Toto sa dá upraviť na x*(x*x - 1) a ďalej na x*(x-1)*(x+1). Všimneme si, že je to súčin troch po sebe idúcich čísel. Preto sa medzi nimi určite musí nachádzať práve jedno číslo deliteľné tromi. Taktiež tam bude aspoň jedno párne číslo. Takýto súčin je teda deliteľný zároveň 2 aj 3, a teda je deliteľný 6. Dedičstvo sa medzi šiestich synov **dá rozdeliť spravodlivo**.