- **Keď sú traja.**

Rozdeľuje 3. najstarší. Vieme, že najmladší zaňho určite hlasovať nebude, pretože ho chce vyhodiť a dosiahnuť situáciu, keď ostanú len dvaja. 4. najstarší bude určite hlasovať za, pretože vie, že keby hlasoval proti, tak spolu s najmladším by boli dvaja proti a dostal by sa do nechcenej situácie. Tým pádom 3. najstarší vie, že mu návrh prejde (má na svojej strane 4. najstaršieho a seba), a tak môže navrhnúť čo len chce – sebe všetko a ostatným nič. A tiež sa bude snažiť dopracovať do tejto situácie aby boli traja a rozdeľoval on.

- **Keď sú štyria.**

Rozdeľuje 2. najstarší. 3. najstarší vie, že ak sa mu podarí docieliť vyhodenie 2. najstaršieho, tak dostane všetky peniaze, takže bude hlasovať proti akémukoľvek návrhu. 4. najstarší spolu s najmladším vedia, že ak budú hlasovať proti, skončia pri ďalšom hlasovaní síce bez zlata, ale s miestom v družine a uškodia 2. najstaršiemu. Za sa im teda v tomto prípade oplatí hlasovať len ak dostanú aspoň 1 zlatku (1 > 0, čiže viac, ako by dostali pri ďalšom delení). Takže aby 2. najstaršiemu prešiel návrh, stačí mu prideliť po jednej zlatke 4. najstaršiemu a najmladšiemu, jemu ostane 98 zlatiek.

- **Keď sú všetci piati.**

Rozdeľuje najstarší. 4. najstaršiemu sa oplatí vyhodiť ho, lebo potom mu prejde návrh o 98 zlatkách pre seba. Takže za najstaršieho by hlasoval jedine ak by mu dal viac ako 98, tj. 99 zlatiek. 4. najstarší a najmladší vedia, že v ďalšom hlasovaní dostanú po 1 zlatke, takže za najstaršieho budú hlasovať len ak od neho dostanú viac tj. dve zlatky. 3. najstarší vie, že v ďalšom hlasovaní síce nedostane nič, ale rád uškodí, takže ak ani v tomto nedostane nič, tak bude hlasovať proti. Keď však dostane 1 zlatku, bude hlasovať za (peniaze majú vyššiu prioritu ako uškodenie). Aby najstaršiemu návrh prešiel, potrebuje okrem svojho ešte 2 hlasy. Hlas hociktorého si môže kúpiť za konkrétnu sumu, stačí sa mu teda pozrieť, ktoré dva hlasy sú najlacnejšie. Je to hlas 3. najstaršieho (1 zlatka) a hlas 4. najstaršieho alebo najmladšieho (2 zlatky). Takže ak najstarší obetuje 1 zlatku na 3. najstaršieho a 2 zlatky na 4. najstaršieho alebo najmladšieho (môže si vybrať na ktorého, je to jedno), jeho návrh určite prejde a sebe teda môže dať celý zvyšok, čo je 97 zlatiek.

Delenie teda dopadne tak, že najstarší bude mať 97 zlatiek, 3. najstarší bude mať 1 zlatku a 4. najstarší alebo najmladší bude mať 2 zlatky. Ostatní nebudú mať nič.

Bodovanie: správne riešenie – 4-5 bodov, podľa zdôvodnenia postupu; riešenie príkladu odzadu – 3 body; úvahy bez správnych výsledkov – 0,5-2 body.

PIKOMAT

Vzorové riešenia 3. série letnej časti, kategória 7-9

Príklad S1: Adresa. *Opravoval Daniel „Žofka“ Lovásko.*

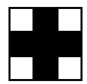
Najviac chýb vznikalo pri nesprávnej interpretácii zadania, kedy ste príklad 111/3 = 37 brali ako dôkaz sporom, že tvrdenie v zadaní nie je správne. Neuvedomili ste si však, že čísla, ktoré nie sú prvočíslami (aj napriek faktu, že majú prvočíselný počet jednotiek), nás nezaujímajú.

Ako riešiť: Pre začiatok si treba určiť, ktorá je vhodná cifra v čísle NNNNNNN...N. Toto číslo si môžeme napísať aj ako N + 10N + 100N + 1000N + ... atď. Keď si vyjmeme N pred zátvorku, dostaneme N(1 + 10 + 100 + 1000 + ...). Tu môžeme vidieť, že naše číslo bude určite deliteľné N. Definícia prvočísla hovorí, že je deliteľné iba samým sebou (čo však na N aplikovať nemôžeme) a jednotkou. Z toho vyplýva, že N musí byť tá jednotka.

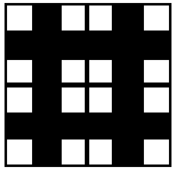
Toto to bolo ešte pomerne jednoduché. Prejdime teda na tú ťažšiu časť príkladu: určiť, či naozaj všetky prvočísla zložené iba z jednotiek majú tých jednotiek v sebe prvočíselný počet. Predstavme si číslo, ktorého počet jednotiek NIE je prvočíslený (počet je zložené číslo, napr. 6) a teda má niekoľko deliteľov (v tomto prípade 2 a 3). Z toho vyplýva, že každé také jednotkové číslo dokážeme rozdeliť na nejaké menšie, *rovnaké* skupinky po niekoľko jednotiek: pre počet 6 to bude na dve skupinky po tri (111|111) alebo tri skupinky po dve jednotky (11|11|11). Teraz dokážeme každou touto skupinkou vydeliť naše číslo a tým pádom vieme, že naše číslo nie je prvočíslo. Môžeme teda povedať, že všetky čísla zložené iba z jednotiek, ktoré nemajú počet jednotiek prvočíselný, nie sú prvočísla. To isté povedané opačne: všetky prvočísla zložené iba z jednotiek budú mať v sebe určite prvočíselný počet cifier „1“.

Bodovanie: prečo práve jednotky – 2 body; dôkaz o počte jednotiek – 3 body; sem-tam som pridelil bodík za dobrý nápad alebo myšlienku, kvetinky tentokrát neboli :).

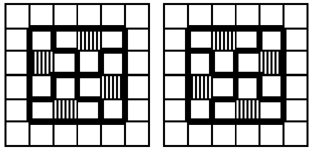
Príklad S2: Šach. *Opravovala Jana Štolcová.*



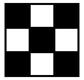
V prvom rade si treba uvedomiť, čo je to kríž skladajúci sa z 5 štvorčekov. Keďže väčšina z nás si myslí, že je to tento útvar, vyriešme úlohu najprv preň.

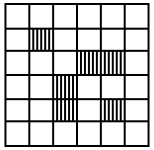


Útvar zaberá plochu 3x3 štvorčeky, takže si môžeme hneď všimnúť, že do šachovnice 6x6 štvorčekov sa zmestia 4 neprekrývajúce sa kríže. Keďže máme vyšrafovať také štrvorčeky, aby sa do šachovnice nezmestil žiaden kríž, musíme zabrániť minimálne krížom na obrázku. Teda hneď vieme, že menej ako 4 vyšrafované štvorčeky (z každého kríža jeden) nepostačia. Skúsme teda nájsť také umiestnenie 4 štvorčekov, že sa do šachovnice nezmestí žiaden kríž. Kríž môže byť na šachovnici na 16 miestach (stred kríža by mohol byť kdekoľvek na prostrednej šachovnici 4x4). Chceme týchto 16 štvorčekov rozdeliť na 4 skupiny tak, aby v každej bol práve jeden vyšrafovaný štvorček a bránil krížom so stredmi vo všetkých políčkach tej skupinky.To sa dá týmito dvoma spôsobmi:



Zopár z vás za kríž považovalo útvar v tvare X, prípadne oba spomínané. V tom prípade bolo treba vyšrafovať 6 políčok (príklad na obrázku).



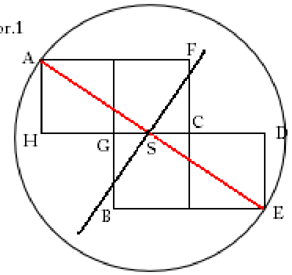


Bodovanie: Správne riešenie (nákres) – 3 body; viac podľa kvality zdôvodnenia, že na menej to nejde; a za postup, akým ste ideálne rozmiestnenie našli. Iba kríž tvaru X – max. 3 body.

Príklad S3: Známka. *Opravovala Diana „Dee“ Odrobináková.*

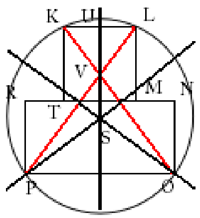
Úloha mala dve časti – prvý a druhý útvar. Každému z nich ste mali opísať kružnicu. Prvý útvar bol stredovo súmerný, stačilo spojiť dva najvzdialenejšie body v obrázku – bod A a E, čím ste našli stred súmernosti práve v strede úsečky HD. Polomer opísanej kružnice teda nemôže byť menší ako úsečka |AS|=|ES|. Keď si ju narysujeme, zisťujeme, že celý útvar je do nej pekne vpísaný – toto je tá najmenšia možná kružnica.

obr.1



V druhej časti ste sa museli popasovať s trocha komplikovanejším útvarom. Nestačilo len spojiť body K s O a L s P, pretože tam, kde sa nám spojnice pretli, by nebol stred najmenšej kružnice. Mnohí z vás zistili, že útvar je osovo súmerný podľa osi UV a preto by bolo najvýhodnejšie, keby bol stred kružnice umiestnený rovnako ďaleko od pravej aj ľavej časti útvaru – práve na tejto osi UV. Ba čo viac, niektorí napísali, že najmenšia kružnica vznikne, keď bude úsečka SL rovnako dlhá ako úsečka SO. Pomocou Pytagorovej vety ste prišli na to, že keď chceme zabezpečiť rovnosť týchto dvoch úsečiek, bod S musí ležať na 3/16 príslušnej strany malého štvorca. Takto sa dalo zostrojiť tú najmenšiu možnú kružnicu. Iný spôsob riešenia bol podľa postupu, ktorým ste sa v škole učili opisovať mnohouholníkom kružnice – spravili ste si osi úsečiek PL a KO a tam, kde sa vám pretli, bol práve náš hľadaný stred.

obr.2



Poznámka: Aj prvý príklad sa dal riešiť pomocou osi úsečky AE, ale keďže tá pretla úsečku HD v presne tom istom bode a teda stred vznikol rovnako, uznávala som aj riešenia bez tejto osi.

Bodovanie: každú jedna z dvoch správnych odpovedí – 1 bod; vysvetlenie prvého obrazca – 1 bod; vysvetlenie druhého – 2 body; ich (ne-)udelenie samozrejme záviselo od správnosti a podrobnosti vášho vysvetlenia.

Príklad S4: Snehulienka. *Opravoval Juraj Pavlovič.*

Hádam každý si už po vypísaní prvých zopár trpaslíkov všimol, že počet cukríkov na každého ďalšieho trpaslíka sa zväčšuje o 2. Pre tých podozieravejších môžeme uviesť aj drobný dôkazík: Keď si počet cukríkov pre prvého trpaslíka označíme ako *x* a počet pre druhého ako *(x + d)*, potom tretí musí dostať *2(x+d) - x = x+2d* cukríkov. Keď si teraz počet druhého označím ako *y*, vidím, že tretí bude mať *(y+d)* cukríkov. Je teda zrejmé, že rozdiel *d* medzi dvoma po sebe obdarenými trpaslíkmi ostane vždy zachovaný a je určený iba rozdielom prvých dvoch trpaslíkov zo zadania, na ktorých sa pravidlo ešte nevzťahuje.

Keďže začíname od 1 a pripočítavame vždy 2, je jasné, že ideme postupne po všetkých nepárnych prirodzených číslach. Prísť na 2009. nepárne číslo v poradí nebol nijaký problém, správna odpoveď *4017* svietila na drvivej väčšine riešení.

Teraz už iba zrátať prvých 2009 nepárnych čísel dokopy (na čo mnohí z vás úplne zabudli). Všimnime si zaujímavú vec: súčet prvého a posledného čísla bude 4018, súčet predposledného a druhého bude 4018...; keby som mal takýchto čísel *n*, dokážem vytvoriť n/2 takýchto dvojíc s vždy rovnakým súčtom. Čiže v tomto prípade 4018*(2009/2) = *4 036 081*. Juchú, výsledok je na svete!

Bodovanie: správne riešenie s odôvodnením – 5 bodov; iba prvá otázka – max. 2 body.

Príklad S5: Život či majetok. *Opravovala Mária „Marry“ Šormanová.*

Keďže zbojníci si vždy vedia predstaviť, ako by teoreticky mohlo dopadnúť ďalšie hlasovaie po vylúčení momentále najstaršieho člena, základom riešenia tohto príkladu je začať od konca. To znamená začať od delenia, kedy už hlasujú iba dvaja zbojníci.

- **Keď sú dvaja**.

Rozdeľuje 4. najstarší. Keďže mu ide o miesto v družine, bude sa snažiť, aby zaňho ten najmladší hlasoval a aby mu zostalo miesto. Najmladší vie, že ak zaňho hlasovať nebude, tak ho vykáže, ostane najstarší a zoberie si všetky peniaze sám. Takže aj keby mu 4. najstarší pridelil celých 100 zlatých a sebe nič, najmladší vie, že miesto už má isté a aj peniaze dostane všetky, tak rád uškodí a teda každopádne toho 4. najstaršieho vyhodí. Čiže pre 4. najstaršieho je jednoznačne nevýhodné dostať sa do tejto pozície, kde ostanú už len dvaja a bude sa snažiť tejto situácii zabrániť.