Príklad S5: Okrúhliaky. *Opravoval Martin „Panda“ Svetlík.*
(vzorové riešenie podľa riešenia Barbory Winczerovej)

		X		O				A_1
			X			O		B_1
			X	O				C
	X				O			B_2
				X		O		A_2

Na začiatku si uvedomíme, kedy už bude víťaz jasný. Ak bude situácia vo všetkých riadkoch podobná ako v riadku C (teda budú dvojice kameňov vedľa seba), tak ten, kto bude na ťahu, prehrá – bude môcť už len cúvať a ten druhý vždy prisunie svoj kameň k tomu, ktorým prvý cúvol.
Riadky A_1 a A_2 si nazveme zrkadlové – medzi kameňmi je rovnaký počet voľných políčok – jedno.
Riadky B_1 a B_2 sú tiež skoro zrkadlové, a práve prvý ťah prvého hráča bude ten, že aj tie upraví na zrkadlové (teda buď sa v B_1 pohne o jedno dozadu alebo v B_2 o jedno dopredu).
Teraz máme dve dvojice zrkadlových riadkov a druhého hráča na ťahu.
Ak sa tento pohne smerom dozadu (od súpera), tak prvý sa v tom istom riadku pohne o toľko isto do predu (k nemu) – zachová zrkadlovosť riadkov a zároveň zníži počet možných ťahov druhého.
A ak sa druhý pohne dopredu, tak potom sa prvý pohne tiež o toľko isto políčok dopredu, ale v zrkadlovom riadku.
Týmito ťahmi tiež zachová zrkadlovosť a po chvíli donúti súpera cúvať. A keď už bude druhý všetkými figúrkami len cúvať, dotlačí ho prvý na koniec hracieho plánu (podľa prvého pravidla), kde sa už druhý nebude môcť pohnúť a prehrá.
Všimnime si, že sme sa bavili o prvom a druhom, a nie o „tom čo má X“ a „tom čo má O“. Pretože vyhrať v tejto pozícii môže naozaj ktorýkoľvek z nich, pokiaľ začína a bude hrať tak, ako sme opísali.

Bodovanie: Závisí to na poradí a nie na symbole, s ktorým hráč hrá = 1 bod. Vyhrať môže ten prvý = 0,5 bodu. Zvyšných 3,5 b za popis stratégie, ako má hrať.
Za rôzne iné omyly sa počet bodov pohyboval okolo 1 až 1,5 bodu.

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

podporuje odborný rast organizátorov seminára

PIKOMAT

Vzorové riešenia 3. série zimnej časti, kategória 7-9

Príklad S1: Vázy. *Opravovala Katka Beláková.*

Táto úloha sa dala pochopiť a riešiť dvoma spôsobmi. Ukážeme si oba.
1. Otázka znela, na koľko najmenej ťahov sa môže Jankovi podariť vytiahnuť žiadaný počet okrúhliakov.
Teda ak sa mu bude dariť a vždy vytiahne tie, ktoré potrebuje. Ako? Najviac sa mu oplatí ťahať z veľkej vázy, lebo tam na menší počet ťahov vytiahne viac kamienkov. Tak z nej vytiahne 9 modrých a 9 zelených (to je 18:3=6 ťahov), na poradí nezáleží. Zostali mu tam ešte dva kamienky požadovanej farby. Oplatí sa mu aj tie vytiahnuť? Áno, lebo si ušetrí jeden ťah v porovnaní s malými vázami. Vytiahne ešte aj tie posledné dva. Spravil dokopy 7 ťahov z veľkej vázy a má po 10 kamienkov z požadovaných farieb. Tých zvyšných 5 modrých a 5 zelených mu už zostáva vytiahnuť z malých váz. To je na 10 ťahov, keďže vyťahuje už len po jednom. Takže najmenej sa to dá na **17 ťahov**. Samozrejme, nemusí mať vždy šťastie, ale môže.
2. Ak si však zoberieme, že Janko sa na kamienky nepozerá a chce mať *istotu*, že vytiahol *aspoň* 15 modrých a *aspoň* 15 zelených, bude potrebovať viac ťahov – musí rátať s najhoršími možnosťami vytiahnutia (až keď zaistí aj ten najhorší prípad, bude mať ozajstnú *istotu*). V žiadnej váze nie sú všetky tieto kamienky spolu. Tu si musí uvedomiť, že najvýhodnejšie je vytiahnuť z veľkej vázy všetky kamienky. Prečo? Lebo na 12 ťahov získa 10 modrých a 10 zelených, ktoré by z malých váz ťahal až na 20 ťahov. Zároveň sa mu určite oplatí vytiahnuť všetky kamienky, lebo s každým NEurobeným ťahom si pridáva dva ťahy naviac z malých váz. Takto už má 10 a 10 okrúhliakov. Chýba mu ešte 5 modrých a 5 zelených. Keď vytiahne 9 kamienkov z prvej malej vázy, má istotu, že tam bude aspoň 5 modrých (keby vytiahol najprv 4 zelené). Rovnako je však možné, že nevytiahol ani jeden zelený, takže ešte potrebuje 5 zelených, čiže 8 ťahov z poslednej vázy (keby vytiahol najprv 3 modré). Teraz, keď to všetko pekne zrátam, vyjde mi 12+9+8=**29 ťahov**. Všimnite si, že je to ešte stále menej, ako keby sme tých 30 okrúhliakov vyťahovali na minimálne 30 ťahov z malých váz.

Bodovanie:
Ak ste to pochopili ktorýmkoľvek z týchto spôsobov a správne zdôvodnili = 5 bodov. Menšie nedostatky v odôvodnení, strhávala som 1-2 body, za väčšie nedostatky aj 3 body. Správny výsledok = minimálne 1,5 boda.

Príklad S2: Pole. *Opravoval Pavol „Tamarka“ Hronský.*

Vieme, že plocha malého štvorca je $40m^2$. Ľahko si z toho dokážeme zistiť aj stranu tohoto malého štvorca $\mathbf{a} = \sqrt{40}$. Keďže časť, na ktorej pestujeme zemiaky, je *štvorec,* znamená to, že stred kruhu musí ležať v strede spodnej strany tohoto štvorca. Je vidieť, že teraz si už dokážem (pomocou Pytagorovej vety) vypočítať aj polomer kružnice: $\mathbf{R} = \sqrt{\mathbf{a}^2 + \left(\frac{\mathbf{a}}{2}\right)^2} = \sqrt{\sqrt{40}^2 + \left(\frac{\sqrt{40}}{2}\right)^2} = \sqrt{50}$. Keď poznáme polomer kružnice, vieme si vypočítať aj stranu veľkého štvorca (opäť Pytagorova veta): $\sqrt{50}^2 = \left(\frac{\mathbf{A}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{A}}{2}\right)^2$, čiže $\mathbf{A} = 10m$. Jedna strana je 10m. A teda plocha neprekrytej časti je spodná polovica veľkého štvorca (5 x 10 = 50) plus 2 ‘ofrcky‘ hore, čo je 5 x (10 - $\sqrt{40}$).

$\mathbf{S} = 5 \times (20 - \sqrt{40}\ )$.

Kľúčové bolo si uvedomiť, že si dokážeme vlastne bez väčších problémov zistiť polomer kružnice. S ním to už išlo (väčšine z vás) ako po masle…

Bodovanie:

5 bodov za úplne správne riešenie; body sa strhávali hlavne za nedostatočné odôvodnenie svojich (aj keď správnych) krokov.

Príklad S3: Násobenie. *Opravovala Marta Kořínková.*

Najprv zistíme, koľko existuje 5 ciferných čísel. Tých je 99 999 – 10 000 + 1 (lebo rátame aj číslo 10000) = 90 000. Ďalej zistíme, koľko je všetkých násobkov 5 ciferných čísel, a to je 90 000 * 90 000 = 8 100 000 000. Ak sa pokúsime zistiť číslo, ktoré keď vynásobíme sebou samým, nám dá výsledok na hranici medzi 9 a 10 cifernými číslami, tak nám vyjdú čísla 31 622 a 31 623. Najmenšie 10-ciferné číslo je 1 000 000 000 a najväčšie 9-ciferné číslo je 999 999 999. 31 622 * 31 622 = 999 950 884; 31 623 * 31623 = 1 000 014 129. Teraz vieme, že ak vynásobíme akékoľvek dve čísla obe väčšie ako 31 622, dostaneme 10-ciferný výsledok. Taktiež platí, že ak vynásobíme akékoľvek dve čísla obe menšie ako 31 623, dostaneme 9 ciferný výsledok.

Potom je tu už len možnosť, že čísla kombinujem (jedno väčšie a jedno menšie ako 31 622 príp. 31 623). Pri tejto možnosti nám môžu vychádzať aj 9- aj 10-ciferné výsledky. Avšak spomeňme si na otázku zo zadania a uvedomme si iný zaujímavý fakt: počet výsledkov, ktoré dostaneme po násobení dvoch čísiel oboch väčších ako 31 622 (teda počet 10-ciferných výsledkov) je (99 999-31 622)* (99 999-31 622) = 4 675 414 129. Zároveň si pamätáme, že všetkých možných výsledkov je 8 100 000 000. Vidíme, že už teraz je viac ako polovica výsledkov 10-ciferných. Tým pádom je odpoveď jasná: vo viacerých prípadoch bude výsledok 10-ciferný.

Najčastejšou chybou bolo, že ste nezobrali do úvahy všetky možnosti a riešili ste to dosadzovaním a skúšaním čísel. Správne riešenie z toho síce môžete vyčítať, no nemôžete tým nikoho presvedčiť, že to bude platiť vždy. Často ste si tiež neuvedomili, že keď kombinujete čísla jedno väčšie a jedno menšie ako 31 622 príp. 31 623, tak vám môžu vyjsť výsledky aj 9- aj 10-ciferné.

Bodovanie:

Za samotný výsledok: 0,5 až 1 bod

+ mierne objasnenie výsledku s očividnými chybami: 0 až 1 bod

+ podľa postupu a zohľadnenia všetkých možností: 0 až 3 body

Príklad S4: Kečup. *Opravovala Vlasta „Krupla“ Gubášová.*

Najskôr upozornenie k správnemu pochopeniu zadania úlohy:
„Zvyšok“ kečupu je pred každým delením iné množstvo , teda každý z ľudí dostáva inú jednu osminu a všetky osoby dostávajú kečup iba raz, t.j. nedostávajú ho vo viacerých kolách. Takže osminu tvoríme vždy pre každého zabávajúceho sa zo zvyšku kečupu po odčítaní kečupových dávok, ktoré dostali spolu všetky osoby pred ním. Mara rozdala všetok kečup, teda po skončení delenia jej nič nezostalo.
Teraz k riešeniu – uvediem dve: jedno výpočtovo náročnejšie, ktoré použila väčšina riešiteľov, druhé – elegantnejšie s peknou myšlienkou bez dlhých výpočtov.
1. Typ riešenia: označenie: K = množstvo kečupu (počet naberačiek) pred delením: Vyjdeme z faktu, že všetci zabávajúci sa dostali rovnaké množstvá kečupu, teda i prvý s druhým, a tieto hodnoty dáme do rovnosti. Prvý dostal 2 + (K-2)/8 naberačiek , po odobratí jeho celého podielu zostal v hrnci takýto zvyšok: K – (2 + (K-2)/8) kečupu, t.j. (K-2) - (K-2)/8, čiže 7/8(K-2).
Druhý človek teda dostal: 4 + (7/8(K-2)-4)/8
Z rovnosti hodnôt 2 + (K-2)/8 = 4 + (7/8(K-2)-4)/8 dostaneme pre K = 98 naberačiek. Z toho vyplýva, že prvý (teda i všetci ostatní) dostane 2 + 96/8 = 14 naberačiek a kečup si rozdelilo spolu 98 : 14 = 7 osôb.
2. Typ riešenia: označenie P = množstvo kečupu, ktoré zostane poslednej osobe, (P-2) je teda počet „celých“ naberačiek pre predposledného - dostal o 2 menej ako posledný (ešte nezahŕňame osminu zvyšku), z = zvyšok kečupu pred pridelením poslednému zabávajúcemu sa:
Po pridelení kečupu poslednému nezostane žiaden zvyšok, teda (1/8)z=2 pred posledným delením, lebo (P-2) + (1/8)z = P. Keďže posledný dostane (7/8)z , potom P =(7/8)z = 14. Keďže P je dvojnásobok poradového čísla posledného zabávajúceho sa, P/2 určuje počet osôb, ktorým bol kečup rozdaný, teda 7.

Bodovanie:

0 – zle pochopené zadanie; zlý výsledok bez postupu,
1 – uvedený iba výsledok; náznak výpočtu,
2 – postup skúšaním s výpočtovou chybou,
3 – postup skúšaním s dobrým výsledkom,
4 – dobrý výsledok a postup s výpočtovou chybou
4,5 – dobrý výsledok s logickými skokmi v postupe