Príklad S5: Banky a bezpečnosť. *Opravovala Lucia „Lia“ Schoberová.*

V prvom rade si potrebujeme uvedomiť to, že nezávisí na tom, ktoré políčko od zlodejov banka bude chcieť. Keďže kartou nedisponujú, je to vždy iba výstrel do tmy. Po neúspešnom pokuse sa dokonca vygeneruje nové políčko, takže zlodeji sa nemôžu spoľahnúť ani takú vec, že si netipnú už raz tipnutú (a predtým nesprávnu) hodnotu.

Keďže jedno políčko na GRID karte pozostáva z dvoch alfanumerických znakov, spolu je 36.36 = 1296 možností na to, aká kombinácia znakov mohla byť na políčku. Keby mali zlodeji len jednu možnosť, majú šancu trafiť sa *1:1296*.
Ak sa netrafia (čo je šanca *1295:1296*), tak potom hádajú ďalej. Šanca na uhádnutie na druhý pokus je opäť *1:1296* (pretože sa vygenerovalo nové náhodné políčko, ktoré musíme hádať), ale najprv sa k tomuto druhému pokusu musia dopracovať a to sa stane vtedy, ak neuhádnu na prvý pokus. Teda šanca, že sa trafia na druhý pokus je *(1295:1296).(1:1296)* atď...
V podstate šancu majú takúto: *šanca, že uhádnu práve na 1. pokus + šanca práve na 2. pokus + šanca práve na 3. pokus + šanca práve na 4. pokus + šanca práve na 5. pokus.*
Šanca uhádnutia práve na 1. pokus je 1:1296. Aby ho uhádli práve na 2. pokus, musia neuhádnuť na prvý pokus *(1295:1296)* a zároveň uhádnuť na ďalší pokus *(1:1296).* Preto je celkovo táto šanca $1295:(1296^2)$.
Podobne šanca, že uhádnu práve na tretí pokus je: *(neuhádnu na prvý pokus).(neuhádnu na druhý pokus).(uhádnu na tretí pokus) = (1295:1296).(1295:1296).(1:1296) =* $1295^2:1296^3$. Podobne šanca, že uhádnem na štvrtý pokus je $1295^3:1296^4$ a na piaty pokus $1295^4:1296^5$. Toto všetko treba sčítať a dostaneme šancu, že zlodeji uhádnu na niektorý z prvých piatich pokusov. Číselne sa táto šanca dá približne vyjadriť ako 0,00385, čo je asi 0,385 %.

U otca je to podobné, ale on má 4 cifry, teda *10.10.10.10 = 10 000* možností. Postup bude rovnaký ako u mamy, ale namiesto 1296 možností máme 10 000. Ľahko vidieť, že pri každom pokuse je šanca na uhádnutie menšia, teda aj súčet bude menší. Preto je otcova karta lepšie zabezpečená.

Iný pohľad na vec je porovnaním šancí ne nabúrateľnosti systému. To znamená, že neuhádnu na prvý pokus a zároveň neuhádnu na druhý pokus, atď... až po piaty pokus. To "a zároveň" značí, že šance sa budú násobiť (skús si to predstaviť pri šanci hodiť 6 na dvoch kockách).
Mamina karta: *(1295:1296).(1295:1296).(1295:1296).(1295:1296).(1295:1296)*
Otcovca karta: *(9999:10000).(9999:10000).(9999:10000).(9999:10000).(9999:10000)*
Z tohto je vidieť, že otcova karta má väčšiu šancu ostať nenabúraná, teda je bezpečnejšia.

Bodovanie: 5 bodov za úplne správny výsledok, 3 body za uvedomenie si zmeny šance uhádnutia hesla pri skúšaní rôznych kombinácii, 1 bod za správne vypočítanie iba šance uhádnutia pri prvom pokuse, 0 bodov za nesprávne riešenie.

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

podporuje odborný rast organizátorov seminára

PIKOMAT, 25. ročník šk. rok 2007/2008

PIKOMAT

Vzorové riešenia 2. série letnej časti, kategória 7-9

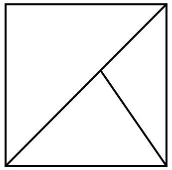
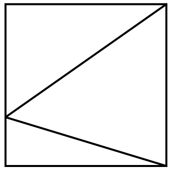
Príklad S1: Zložené čísla. *Opravoval Pavol „Tamara“ Hronský.*

Najskôr si treba uvedomiť, že zložené číslo je každé prirodzené číslo okrem prvočísel a jednotky. To znamená, že vlastne hľadáme medzery medzi prvočíslami. Hľadanie v tabuľkách je jednoduchší spôsob, ktorý však nie je optimálny pokiaľ hľadáme veľké medzery.
Dobrým základom pre nájdenie veľkého počtu zložených čísel za sebou je nájsť kľúčové číslo, ktoré má veľa deliteľov. Prečo? Ak máme napríklad číslo deliteľné tromi, tak aj číslo o 3 väčšie bude deliteľné tromi. A teda ak nájdem číslo deliteľné súčasne napríklad číslami 2, 3 a 4, tak číslo o dva väčšie bude deliteľné dvomi (a teda zložené), číslo o 3 väčšie bude deliteľné tromi (a tým pádom taktiež zložené) a nakoniec číslo o 4 väčšie bude deliteľné 4 (a zase zložené). Takže máme tri za sebou idúce zložené čísla. Uvedomme si, že takto vieme získať ľubovoľný počet zložených čísel za sebou. Jednoducho stačí nájsť vhodné kľúčové číslo. Ak budem chcieť n zložených čísel za sebou, tak kľúčové číslo môže byť deliteľné napríklad číslami $2, 3, 4, \dots n+1$ (nedivte sa číslu $n+1$, aj v príklade vyššie máme 3 za sebou idúce zložené čísla, ale požadujeme deliteľnosť až do čísla 4).
Existuje také číslo? Jasné, vyrobme si také. Ak chcem číslo deliteľné 7, 13 a 17, jednoducho zoberiem ich súčin. Podobne ak chcem číslo deliteľné $2, 3, \dots n+1$, tak tieto čísla vynásobím a dostanem číslo $M = 2.3.4. \dots .(n+1)$ (naše číslo rozhodne nie je minimálne možné s hľadanou vlastnosťou, ale to ani nepožadujeme). Potom čísla $M+2, M+3, \dots M+n+1$ sú zložené a máme n zložených čísel za sebou.
Z estetických dôvodov sa číslo $2.3.4. \dots .(n+1)$ zapisuje ako $1.2.3.4. \dots .(n+1)$, a keďže sa v matematike toto číslo objavuje často, má dokonca aj svoju značku. Súčin vyššie sa zapisuje ako $(n+1)!$ (výkričník sa číta ako *faktoriál*).
Podľa tohto postupu nájdeme 10 či trebárs aj 458739485032485 za sebou idúcich zložených čísiel.
Podľa nášho postupu teda vytvoríme 10 za sebou idúcich zložených čísel: 39916802 až 39916811. Desať za sebou idúcich zložených čísel je však napríklad aj v postupnostiach 114 až 126, 212 až 222, 3864 až 3876 atď.

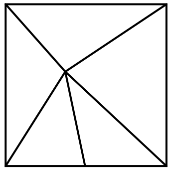
Bodovanie: 10 za sebou idúcich zložených čísiel vypísaných 1 bod, komentár k tomu 1 bod. Riešenie druhej časti príkladu pomocou tabuliek 1 bod, komentár, opísanie postupu prečo sme tak uvažovali ďalší 1 bod. Ak niekto prišiel na všeobecné riešenie, nie len skúšaním, dostal zvyšný bod.

Príklad S2: Strihanie látky. *Opravovala Diana „Dee“ Odrobináková, vzorové riešenie napísala Kaťa Smolárová.*

Zoberte do rúk ceruzky a papiere, ide sa totiž vo veľkom kresliť☺.

Pre jednoduchosť sa najprv pozrime na rozdelenie štvorca na 3 trojuholníky s rovnakým obsahom. Keďže súčet vnútorných uhlov štvorca je 360° a troch trojuholníkov 540°, je nám hneď jasné, že jeden z bodov, na ktorých budú vrcholy trojuholníka, musí ležať na strane štvorca alebo na strane nejakého iného trojuholníka. Ak by ležal na strane štvorca, je jednoduché zistiť, že jeden z trojuholníkov musí mať obsah polovicu štvorca. Ak by ležal na strane iného trojuholníka, tento by musel vzniknúť tak, že by mal vrcholy iba v rohoch štvorca a teda by mal obsah polovicu štvorca. Tvrdenie je dokázané pre 3 trojuholníky.



Teraz sa pozrime na 5 trojuholníkov. Pridáme 360 stupňov, teda jeden vnútorný alebo 2 "hranové" vrcholy. Najprv sa pozrime, čo sa stane, keď pridáme vnútorný vrchol. Z takéhoto vrchola musia ísť strany do oboch vrcholov na strane, kde leží náš hranový vrchol (ináč by nám určite vznikol trojuholník s aspoň štvrtinovým obsahom). Tým však obkľúčime hranový vrchol a jediná strana z neho môže ísť do stredového vrcholu. Problém vznikne, keď si uvedomíme, že tým pádom musia ísť strany zo stredového vrcholu do všetkých 4 vrcholov štvorca a tým pádom štvorec na 5 častí s rovnakým obsahom nerozdelíme.
Ako to bude vyzerať v prípade, že máme 3 "hranové" vrcholy, nechám na vás :).
Pridaním ďalších 2 trojuholníkov, na ktoré by sme chceli deliť, musíme teda zjavne pridať ďalší "stredový" vrchol. Z každého stredového vrcholu musia viesť aspoň 3 strany do už existujúcich vrcholov (ináč nám nevzniknú trojuholníky). Z nášho pôvodného stredového vrcholu (podobný, na aký sme prišli úvahou pri delení na 3) už nemôže ísť žiadna ďalšia strana do vrcholu štvorca (rozmyslite si prečo). To znamená, že zo všetkých ostaných vrcholov musí ísť strana do toho jedného zostávajúceho vrcholu. Zároveň ale musí ísť jedna strana z každého vrcholu aj do nášho prvého vnútorného vrcholu (ináč nám nevzniknú trojuholníky). Keď si to nakreslíme, tak si môžme všimnúť, že takýmto postupným umiestňovaním vrcholov sa vždy nakoniec dostaneme k štvoruholníku, ktorý by sa mal uhlopriečkami rozdeliť na 4 zhodné časti, avšak to sa nikdy nestane. Dôvodom je to, že máme aj jeden stranový vrchol a teda umiestnenie vnútorných vrcholov nemôže byt symetrické a štvoruholník teda nebude pravidelný.
To teda znamená, že látka na nepárny počet trojuholníkov s rovnakým obsahom rozdeliť nejde.

Bodovanie: Úloha bola pomerne ťažká. Za správny výsledok ste mohli dostať 1 bod. Ak ste zvažovali pravidelné rozrezávanie štvorca (látky), tak sa vám mohlo pripočítať ďalšieho pol bodu, za nepravidelné taktiež pol. A zvyšné tri body ste mohli získať podľa toho, do akej miery ste vysvetlili (dokázali), že sa to nedá. Najväčším problémom bolo, že ste sa snažili nájsť len zopár možností, kde to nevychádza, avšak to nie je dôkaz toho, že sa to skutočne nedá.

Príklad S3: Veveričky. *Opravoval Juro Pavlovič.*

Otázka znela: *Koľko najmenej preskokov musia veveričky urobiť, aby boli na konci URČITE každá na svojom strome s jedným orechom, BEZ OHĽADU na to, ako mali orechy rozdelené na začiatku?*
Práve na slovko „určite“ mnohí zabudli, aj keď je v tomto príklade kľúčové...
Aby som mal v niečom ÚPLNÚ ISTOTU, a teda mohol povedať, že to URČITE dopadne tak-a-tak, musím zabepečiť aj ten najhorší prípad, aký vôbec môže nastať. Keď mám zaistenú najhoršiu možnosť, ostatné ma trápiť nemusia, lebo sú všetky už iba priaznivejšie.
Takže v tomto príklade otázka znie: *Na koľko najmenej skokov dokážu veveričky rozdeliť najnepriaznivejšie rozmiestnené oriešky?* Najnepriaznivejšia možnosť je 5+0+0+0+0, teda keď všetkých 5 orieškov má na začiatku veverička na krajnom strome (akýmkoľvek iným rozmitnením na začiatku by som sa len priblížil k požadovanému konečnému stavu 1+1+1+1+1).
Zrátať, že je na to potrebných najmenej 20 skokov, už nie je problém. Uvedomme si, že je jedno, ktorá veverička s orechom skáče: či tá z prvého stromu ho zanesie a vráti sa alebo tá z piateho stromu si preň príde alebo si ho odovzdajú na treťom strome... Tak to nechajme všetko na prvú veveričku Najprv preskáče na najvzdialenejší strom a späť (8 skokov), potom na štvrtý a späť (6 skokov), na stredný a späť (4 skoky) a nakoniec na druhý a späť (2 skoky).

Bodovanie: 5 bodov za úplne správne riešenie.

Príklad S4: Závažia. *Opravovala Lenka „Lenika“ Bendová.*

Zadanie tohto príkladu ste v zásade pochopili dvomi rôznymi spôsobmi:
1. spôsob: Závažia možno ukladať len na jednu stranu váh a na druhú to, čo vážime.
2. spôsob: Ukladať na jednu stranu váh len závažia a na druhú stranu závažia plus to, čo chceme vážiť.

1.spôsob: Pri tomto spôsobe ukladania budeme potrebovať vybrať závažia tak, aby sa z nich dali vyskladať všetky hmotnosti až po najvyššiu možnú. Začať je vhodné od tých najmenších a teda určite treba závažie s hmotnosťou **1 g**, a tiež **2-gramové**. 3 gramy možno odvážiť použitím týchto dvoch. Ďalšie potrebné závažie bude to s hmotnosťou **4 g**. S týmito závažiami možno odvážiť hmotnosti 5 g (4+1), 6 g (4+2) a 7 g (4+2+1). Nasledujúce potrebné závažie bude to s hmotnosťou **8 g**. Teraz môžem odvážiť ďalšie hmotnosti: 9 g (8+1), 10 g (8+2), 11 g (8+2+1), 12 g (8+4), 13 g (8+4+1), 14 g (8+4+2), 15 g (8+4+2+1). Ešte treba vybrať posledné závažie a to následnou hmotnosťou, teda **16 g**. S týmito piatimi závažiami možno obdobným spôsobom ako doteraz odvážiť všetky hmotnosti až po 31 g (16+8+4+2+1).
2. spôsob: Pri druhom spôsobe sa dá ukladať na obe strany váh, pričom tie závažia, ktoré sú na strane spolu s váženým predmetom, majú voči „klasickým“ závažiam akoby zápornú hodnotu. Preto ich označujem znamienkom “ - “.
Opäť potrebujeme odvážiť 1 g. Môžeme zvoliť **1-gramové** závažie. Tým, že už mám 1-gramové závažie a môžem ho použiť aj na druhej strane váh (ako -1 g) už nepotrebujem závažie s hmotnosťou 2 g, ale môžem preskočiť na **3-gramové**. Tým teraz možno odvážiť 1 g, 2 g (3-1), 3 g a 4 g (3+1). Opäť mam dokopy 4 g, ktoré môžem použiť so záporným znamienkom. Preto ďalšie potrebné závažie je **9-gramové**, a vážiteľné hodnoty sú 5 g (9-3-1), 6 g (9-3), 7 g (9-3+1), 8 g (9-1), 9 g, 10 g (9+1), 11 g (9+3-1), 12 g (9+3), 13 g (9+3+1) ... Rovnakým spôsobom sa vieme dopracovať k hmotnostiam ďalších dvoch závaží a to **27 g** a **81 g**. Spolu takto môžem odvážiť 121g. Toto riešenie mala väčšina z tých, ktorý pochopili tento princíp správne. Správnym riešením teda sú hmotnosti *1g, 3g, 9g, 27g a 81g*.

Bodovanie: 0 - 2,5 bodu bolo za nesprávne riešenie (závisí od prezentovaných myšlienok); 3,5 bodu som dávala za riešenia pre prípad kde sa dávajú závažia len na jednu stranu váh (1.spôsob); 4,5 bodu dostali tí z vás, ktorí prišli na možnosť kladenia závaží na obe strany, ale nemali riešenie celkom správne. 5 bodov bolo za úplne správne riešenie aj s postupom.