Príklad S5: Hotel Štvorlístok. *Opravoval Martin „Panda“ Svetlík.*

Pred čítaním tohto vzorového riešenia, prosím, zabudnite na všetko, čo ste napísali do svojich riešení vy, a poriadne si vyčistite mysle. Našou chybou sa totiž zadanie mierne odlišovalo od nášho zámeru, a tak bola táto úloha trochu iná, ako sme zamýšľali. K tomu sa však dostaneme neskôr ☺. Väčšina z vás však riešila v podstate tú úlohu, akú sme pôvodne zamýšľali, a nie tú, ktorá bola zadaná, čo je chyba – treba riešiť to, čo je zadané. Takže tento vzorák sa bude v značnej miere odlišovať od vašich riešení. Aj keď nakoniec si ukážeme aj riešenie toho, čo sme pôvodne zamýšľali a čo ste vy riešili.
Pozrime sa na zadanie pozorne. Prvá veta, že všetky izby sú trojposteľové a na každom poschodí ich je rovnako veľa, nám zatiaľ sama o sebe nepomôže, no nezabudneme na ňu. Druhú vetu zatiaľ preskočíme, lebo, ako sa neskôr ukáže, nie je taká jednoznačná, ako sa zdá byť. Ale vrátime sa k nej, nebojte sa. No najľahšie je začať treťou vetou: *Keby v každej izbe boli dvaja ľudia, bolo by ubytovaných rovnako veľa hostí, ako keby na horných dvoch poschodiach nebol nikto, a zvyšné by boli plne obsadené.* Keďže všetky izby sú trojposteľové, tak ak by v každej izbe boli dvaja ľudia, boli by to dve tretiny maximálneho počtu hostí. A teda dve tretiny kapacity sú obsadené (a jedna tretina voľná) aj vtedy, ak na horných dvoch poschodiach nie je nikto a ostatné poschodia sú obsadené. Teda tie dve poschodia sú tá jedna tretina kapacity. A keďže na všetkých poschodiach je rovnako veľa izieb (a teda aj miest, keďže všetky izbý sú trojposteľové), tak každé dve poschodia sú jedna tretina kapacity. Teda dokopy (tri tretiny) má hotel $3.2 = \boldsymbol{6}$ **poschodí**. S týmito šiestimi poschodiami budeme ďalej pracovať.
No a teraz sa vráťme k druhej vete: *Keby boli na každom poschodí plne obsadené všetky izby okrem jednej, ubytovalo by sa toľko hostí, ako keby na najvrchnejšom poschodí nebol nikto a ostatné by boli plné.* No a teraz si ukážeme, prečo je táto veta zradná. *<u>Keby na každom poschodí boli plne obsadené všetky izby okrem jednej</u>*... túto formuláciu mnohí z vás pochopili tak, že tá jedna izba by bola úplne prázdna. Avšak to nemusí byť pravda. Stačí, aby nebola plná (budeme hovoriť, že je neplná). Teda v nej môžu byť 0,1, alebo 2 ľudia. A dokonca tieto neplné izby nemusia byť rovnako obsadené (teda nemusí byť v každej rovnaký počet hostí). Takže voľných miest v týchto šiestich (na každom poschodí je jedna) neplných izbách je od 6 (v každej z nich sú dvaja ľudia a jedno voľné miesto) po 18 (všetkých 6 je prázdnych, teda po 3 voľné miesta). Sami sa môžete presvedčiť, že rôznymi kombináciami obsadenosti týchto šiestich izieb vieme dostať všetky čísla od 6 po 18. Zaujímavé je však to, že počet týchto voľných miest je presne taký, ako je počet miest na 6. (a aj každom inom) poschodí – keďže by bol rovnaký počet ubytovaných (čo je napísané v druhej vete zadania), bol by aj rovnaký počet voľných miest. No a keďže izby sú trojmiestne, počet miest na poschodí je deliteľný tromi. Takže z čísel 6-18 pripadajú do úvahy len 6, 9, 12, 15, 18. Pozorne sa pozrime, čo sme to vypočítali. Toľko hostí môže byť na poschodí. Takže na šiestich poschodiach (teda v celom hoteli dokopy) ich môže byť 6-krát toľko (keďže poschodí je 6). Takže to je 36, 54, 72, 90, alebo 108.
A teraz sa poriadne pozrime, čo sme to vypočítali, a aká bola otázka ☺. Otázka bola, koľko najviac hostí môže byť ubytovaných v hoteli Štvorlístok. Takže zoberieme najväčšie z týchto čísel (108) a to je odpoveď? <u>NIE!</u> Otázka *„Koľko najviac hostí môže byť ubytovaných...?“* totiž znamená to isté ako *„Aká je kapacita hotela?“* A nie *„Aká najväčšia môže byť kapacita hotela pri daných podmienkach?“* A my sme vypočítali, že kapacita hotela je 36, 54, 72, 90, alebo 108 ľudí, a nevieme presne určiť, ktorá z nich to naozaj je. Takže aj keď vieme, že najväčšia možná kapacita je 108, tak odpoveď na zadanú otázku znie: <u>Najviac môže byť ubytovaných 36, 54, 72, 90, alebo 108 hostí, a nevieme určiť, ktorý z týchto počtov je ten pravý.</u>
A teraz prichádza tá najabstraktnejšia úvaha, ktorá odhaľuje chybu zadania (to, že nevieme presne určiť, ktorý z tých počtov je správny, ani to, že väčšina z vás pochopila zadanie inak, ako bolo zadané, nie je chyba zadania. Tá je v niečom inom). Nech je správny hociktorý z týchto počtov, tak to je maximálny počet ubytovaných hostí. Teda môže byť ubytovaných aj menej hostí. Napríklad aj o 7 (ale kľudne aj iné čísla, no rozoberieme si prípad sedmičky) menej, a to napríklad aj presne podľa podmienok druhej vety: na piatich poschodiach by bolo jedno voľné miesto a na tom zvyšnom by bola jedna izba s dvoma voľnými miestami. Teda by to malo vyhovovať zadaniu – na každom poschodí sú plné všetky izby okrem jednej. Keď je rovnaká obsadenosť, je aj rovnako veľa voľných miest. Takže 7 voľných miest by malo byť aj vtedy, keby na hornom poschodí nebol nikto a všetky ostatné by boli plné. Takže horné poschodie má 7 miest. No ale predsa ten počet musí byť deliteľný troma (keďže izby sú trojky)... Čo to znamená? Že taký hotel neexistuje? Ako v ňom potom môžu Mišo s Alicou byť? Že hotel nemôže ubytovávať takéto počty hostí? Čo je to za hlúposť? Že táto kapacita hotela nie je možná? A ktorá potom je?
Bez okolkov sa vám priznáme, že to je chyba zadania, teda naša chyba, ktorú sme si uvedomili prineskoro. Keďže však takmer všetci riešeili iné zadanie (teda považovali neplné izby za prázdne, a s takto pochopeným zadaním sa dopracovali k výsledku správnemu pre takto pochopené zadanie (teda 108), tak sme sa rozhodli tento príklad normálne opraviť s tým, že za toto riešenie mohlo byť najviac 4,5 boda (predsalen, neplná a prázdna izba je podstatný rozdiel). Keby zadanie neobsahovalo túto chybu (a pritom by malo rovnaký zmysel ako má teraz, teda neplné izby by boli neplné, nie prázdne), bolo by asi za neuvedomenie si tohto rozdielu viac strhnutých bodov. Poďakovanie a 5 bodov patrí riešiteľke Adi Chlebíkovej, ktorá si ako jediná uvedomila rozdiel medzi neplnou a prázdnou izbou, správne vyriešila príklad a tým nás upozornila na našu chybu.
A keďže ostatní rátali s neplnou izbou ako s prázdnou, tak si uvedieme aj vzorové riešenie takéhoto (aj keď nesprávneho) pochopenia príkladu.
K tomu, že v hoteli je 6 poschodí, sa dostaneme rovnako ako v prvej časti tohto vzoráku. Potom (za predpokladu, že neplné izby sú prázdne) je v prípade, že na každom pochodí sú plne obsadené všetky izby okrem jednej, voľných 18 miest (na každom zo 6 poschodí jedna izba po 3 postele – $6.1.3 = 18$. A teda 18 voľných miest je aj vtedy, keď je celé horné poschodie prázdne a ostatné sú plné. Takže horné poschodie má kapacitu 18 miest, a keďže izby sú trojposteľové, je to 6 izieb. A ak na každom poschodí je rovnako veľa izieb, tak celý hotel má kapacitu *poschodia × izby na poschodí × poslete na izbe = 6.6.3 = 108 miest.*
Tu nenarazíme ani pri spätnom zamyslení na problém ako pri správnom pochopení, keďže teraz síce tiež môžu ubytovať o 7 (8,9,...) hostí menej, no potom nebude na každom poschodí jedna prázdna (keďže tak sme si „skomolili“ neplné izby) izba, takže potom to nijako nesúvisí s tou druhou podmienkou (ktorá hovorí len o prípade, že tieto izby sú prázdne (teda neplné, ale stále pracujeme s týmto pochopením tohto slova)), takže tá stále platí. Všetko sedí a riešenie za 4,5 boda je teda: „Najviac môže byť ubytovaných 108 hostí.“

Bodovanie: 5 bodov za správne pochopenie zadania a vyriešenie (teda za riešenie: 36, 54, 72, 90 alebo 108) bez ohľadu na výsledok diskusie o neexistencii hotela.
Maximálne 4,5 boda za zlé pochopenie neplných izieb, pričom samozrejme, záviselo od postupu, nakoľko ste vysvetlili jednotlivé svoje kroky. Týchto 4,5 boda bolo rozložených takto: Za dôkaz, že poschodí je toľko, ako izieb na poschodí dva body, za ukázanie, že poschodí je 6 tiež dva body. A zvyšný polbod za dotiahnutie dokonca a výsledok 108.
To, či to naozaj platí aj keď je tam menej hostí, som nevyžadoval, keďže pri tomto pochopení je jediná možnosť (teda že všetky sú prázdne), ktorú ste použili už pri riešení, a teda to musí sedieť. V tomto vzorovom riešení to bolo spomenuté len pre ilustráciu, aby ste si všimli rozdiel medzi týmito pochopeniami neplných izieb, teda že aj keď pri správnom pochopení prídeme k správnemu riešeniu, nakoniec zistíme, že nie je správne, no pri vašom pochopení na tento problém nenarazíme.

Komentár k riešeniam: Je mi dosť ľúto, že prevažná väčšina z vás riešila tento príklad rovnicami. Veď v tomto príklade sa dali také pekné myšlienky aplikovať ☺. Napríklad to s tou tretinou, a podobne. Možno aj preto ste neprišli na tú chybu zadania... Keď si zapisujete do rovnice *„plne obsadené všetky izby okrem jednej“*, tak prídete k *3 (počet postelí na izbe) × p (počet poschodí) × [i-1] (izby okrem jednej)*. A tento zápis je zápis prípadu, keď sú tie neplné izby prázdne. Občas je dobré sa jednoducho zamyslieť, pretože niektoré veci sa ťažko zapisujú do rovníc... jasné, že sa dá napísať $3p(i-1)+k$, kde k by znamenalo celkový počet ľudí v tých neplných izbách. Ale koho to napadne...

P-MAT n.o.

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

NADÁCIA INGENIUM

podporuje odborný rast organizátorov seminára

PIKOMAT

Vzorové riešenia 3. série zimnej časti, kategória 7-9

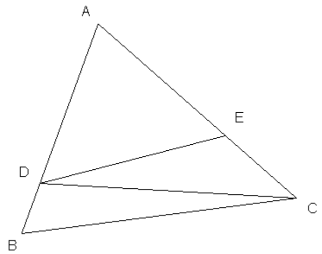
Príklad S1: Medovníčky. *Opravoval Martin „Kotanyi“ Godány.*

Nebudem vás naťahovať, výsledok bol 1020. Otázka pravdaže znie: „Prečo?“ Najprv si bolo treba uvedomiť to, že z troch okrajov medovníkov dokážeme vykrojiť jeden medovník **a jeden okraj**. Skúste si to predstaviť – Evka najprv vykrojila 680 medovníkov, z ktorých jej zostalo 680 okrajov. Tieto okraje znova spojíme do jednej veľkej guče, vyvaľkáme a vykrajujeme. Ako väčšina z vás správne spočítala, *680 okrajov:3 = 226 medovníkov a 2 okraje*. Je však jasné, že pri vykrajovaní týchto 226 medovníkov zvýšilo 226 okrajov (a ďalšie 2, dokopy 228), inak by sme nedokázali vykrajovať ďalej.
Prehrýzli sme sa cez prvú prekážku: ***3 okraje = 1 medovník + 1 okraj*** (ktorý vznikol pri vykrajovaní tohto medovníka z troch okrajov). Teraz sa na tú rovnicu zadívame a odpočítame 1 okraj. A takto sa dostaneme ku kľúčovej veci: ***2 okraje = 1 medovník***.
Na začiatku sme mali 680 medovníkov a 680 okrajov. Pokiaľ vieme, že na výrobu jedného medovníka (bez okraju) využijeme 2 okraje, v tejto chvíli stačilo vydeliť našich 680 okrajov dvoma a pripočítať toto číslo ku 680. Teda, 680 + 340 = 1020.
Väčšina z vás pokračovala a 228 zvyškov ste delili troma. Dostali ste 76 medovníkov a 76 okrajov. 76 okrajov znova predelíme troma a dostaneme 25 medovníkov a 26 okrajov.
26 okrajov = 8 medovníkov a 10 okrajov; 10 okrajov = 3 medovníky a 4 okraje; <u>4 okraje = 1 medovník a 2 okraje.</u>
Z posledného podčiarknutého kroku mi iste uveríte to, že ***2 okraje = 1 medovník***, pokiaľ ste mi to doposiaľ neuverili. Väčšina riešiteľov zahlásila, že tieto dva okraje už nestačia na vykrojenie posledného medovníka (resp. Natlačenie týchto okrajov do formičky) a výsledok je 1019 a dve tretiny posledného medovníka. My už však vieme, že tieto 2 okraje práve stačia na urobenie posledného medovníka a nič nám nezostane.

Bodovanie: Za tieto výsledky ste dostali takéto body:1016 – 3,5 bodu; 1018 – 4 body; 1019 a jeden okraj – 4,3 bodu;1019 a dva okraje – 4,7 bodu; 1020 – 5 bodov. Za chýbajúci postup som strhával 2 body, za numerickú chybu 0,5 bodu.

Príklad S2: Vlajočka. *Opravovala Vlasta „Krupla“ Gubášová.*

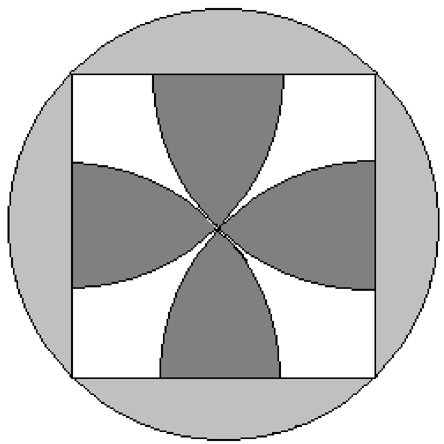
K vyriešeniu tohto príkladu stačí základná poučka z geometrie, ktorou sa vypočíta plocha trojuholníka ako polovica súčinu strany a výšky na ňu. Na základe tejto poučky a zadania vieme ihneď určiť, že trojuholník BCD má plochu rovnú štvrtine plochy trojuholníka ABC, pretože strana AB má štvornásobnú dĺžku ako strana BD a pritom oba trojuholníky majú rovnakú výšku na tieto strany. Podobne zistíme, že trojuholník DCE má plochu ako tretina trojuholníka ADC, keďže základňa AC je trojnásobkom strany CE a výška končiaca v bode D je pre oba trojuholníky rovnaká. Na záver stačí jednoduchá aritmetika, ktorá ukáže, že plocha trojuholníka DCE je štvrtina plochy trojuholníka ABC, pretože trojuholník ADC má plochu troch štvrtín plochy trojuholníka ABC (rozdiel plôch ABC a BCD). Podľa zadania úlohy je to 10 cm².



Bodovanie: 4 body, pokiaľ Vám chýbal jeden krok v dôkaze (alebo výpočtová chyba), 3 body za úvahu bez „výpočtu“, 2 body za nedokončené riešenie (alebo výpočet na konkrétnom trojuholníku), 1 bod za správnu jednu úvahu z riešenia, 0 bodov za nesprávny postup (napriek dobrému výsledku).

Príklad S3: Logo. *Opravovala Alica Nagyová.*

Prísť na spôsob riešenia príkladu tohto typu je azda najľahšie pri dobre nakreslenom (príp. narysovanom) obrázku. Bez pomoci odhadovania z náčrtu však môžeme tvrdiť, že polomer kružníc, ktoré ohraničujú štvorlístok, je 10 cm (20 cm uhlopriečky štvorca sa rozpoľujú presne v polovici, kde sa dotýkajú aj spomínané kružnice) - *0,5 bodu.* Predstavím si kružnicu s polomerom 10 cm a do nej vpísaný štvorec (celé logo). Plochu kruhu, ohraničenú danou kružnicou, ktorú neprekrýva štvorec, tvoria štyri útvary (nazvem ich mesiačiky☺). Tieto mesiačiky majú spolu rovnako veľkú plochu ako náš štvorlístok. Obsah 4 mesiačikov/štvorlístka sa teda rovná ploche, ktorú získam odpočítaním obsahu štvorca s uhlopriečkou 20 cm od obsahu kruhu s polomerom 10 cm - *1 bod.*



Obsah štvorca môžeme vypočítať ako *(u.u)/2* (ak si štvorec rozdelíte uhlopriečkou na dva pravouhlé trojuholníky a potom vyrátate a sčítate obsahy týchto trojuholníkov, dostanete tento vzťah), prípadne *a.a*, kde *u* je dĺžka uhlopriečky a *a* dĺžka strany (ktorú z dĺžky uhlopriečky vyrátame napríklad Pytagorovou vetou). Či už ste počítali priamo pomocou uhlopriečok, alebo cez Pytagorovu vetu dĺžku strany a tú umocnili na druhú, dostali ste jednotne *1 bod.*

Obsah kruhu je $\pi . r^2$, kde r je polomer kruhu. Za správne použitie tohto vzorca ste mohli získať *2 body.*

Problém väčšinou nastal, keď ste začali vyčísľovať. Číslo π má nekonečný desatinný rozvoj, t.j. nerovná sa presne 3,14 a preto celkový výsledok 114 cm² je len zaokrúhlená hodnota, čo bolo potrebné v odpovedi zahrnúť aby ste dostali zvyšných *0,5 bodu.*

Bodovanie: Bodovanie príkladu je súčasťou vzorového riešenia.

Iné riešenia, kde ste používali kruhové výseky príp. odseky som bodovala rovnako. Obsah štvorca *1 bod,* obsah kruhového výseku/odseku *2 body +* jeho polomer *0,5 bodu,* finálna rovnica na výpočet štvorlístka *1 bod* a správne vyčíslenie *0,5 bodu.* V oboch postupoch boli uznané aj konečné výsledky zapísané v základnom tvare, t. j. s π.

Príklad S4: Horúce chvíle. *Opravoval Pavol „PC“ Cvik.*

Označme si jednotlivé vety v zadaní, aby sme sa na ne mohli odkazovať, čo z nich vyplýva. (1) Žena, ktorú ľúbi Juan je zaľúbená do Josého. (2) Dáma, ktorú obdivuje Carlos sa zaľúbila do Pedra. (3) Pán, ktorého miluje Dolores sa zaľúbil do Márie. (4) Gloria ľúbi pána, ktorý zbožnuje Dolores. (5) Gloria nie je zaľúbená Juana ani Josého. (6) Pedro nie je zaľúbený do Márie.

Z viet (3) a (6) vyplýva, že Dolores nie je zaľúbená do Pedra, lebo inak by musel Pedro ľúbiť Máriu, čo by bol spor. Z tohto a vety (2) vyplýva, že Carlos nie je zaľúbený do Dolores. Následne z tohto a vety (4) dostávame, že Gloria nie je zaľúbená do Carlosa. Použitím tohto poznatku a vety (6) sme vylúčili tri možnosti do koho môže byť zaľúbená Gloria (Juan, José, Carlos) a tak ostáva jediná – že Gloria je zaľúbená do Pedra. Použijeme vetu (2) a máme, že Carlos za zaľúbený do Glorie.

Bodovanie: 1 bod za výsledok, 2-3 body ste mohli získať pokiaľ niektoré vaše úvahy neboli vysvetlené vôbec prípadne ste preskočili časť krokov riešenia (napríklad ste si v istom momente tipli, kto je do koho zaľúbený bez toho aby ste overili aj druhú možnosť). 4 body boli za správne riešenie bez komentára, že z ktorých viet čo vyplýva a 5 bodov bolo za úplne správne riešenie.