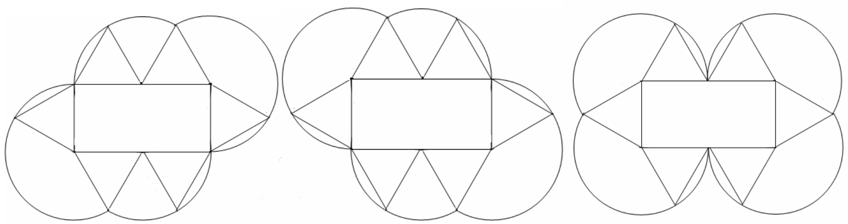
Tretí vrchol sa pohyboval 4-krát po väčšej časti kružnice, teda jeho dráhe zodpovedá uhol *4.210° = 840°*.
Vidíme, že najdlhšiu dráhu prešiel vrchol, ktorý sa na začiatku nedotýkal trojuholníka a táto dráha je o *840° - 660° = 180°* alebo *840°/660° = 14/11* krát dlhšia než dráhy ostatných bodov.



Bodovanie: Za správny narysovaný obrázok boli 2 body, za nenarysovanie som stŕhala 1 bod. Za zistenie a odôvodnenie, že 2 vrcholy majú rovnaké dráhy bolo 0,5 boda, za vypočítanie koľkokrát bola dráha tretieho dlhšia bolo maximálne 1,5 bodu. Zvyšné bodíky ste mohli získať za odôvodnenie svojich krokov ☺.

Príklad S5: Súťažiaci. *Opravovala Vlasta „Krupla“ Gubášová.*

Riešenie bude mať dva kroky:
1. Určíme počet všetkých súťažiacich v turnaji:
Keďže turnaj so 136 zápasmi sa hral systémom: každý hráč zohral jeden zápas s každým zo všetkých ostatných zúčastnených, pri počte **n** - hráčov bolo zapísaných spolu n.(n-1) výsledkov s tým, že každý zápas je započítaný 2-krát (predstav si tabuľku športových výsledkov – ten istý výsledok je uvedený 2-krát, symetricky podľa hlavnej uhlopriečky), teda máme

$$(n.(n-1))/2 = 136$$
$$n.(n-1) = 272,$$

teda súčin dvoch čísel idúcich za sebou je 272. To je splnené pre *n=17*.

2. Určíme počet domácich a počet „hostí“ na turnaji: $n = d + h$. Počet zápasov, kde boli „rôzni“ súperi (domáci proti hosťujúcemu) je *136 – 66 = 70*. Počet všetkých zápasov medzi domácimi a hosťami navzájom je *d.h = 70*. Z rozkladu na prvočinitele *70 = 2.5.7* ľahko nahliadneme, že len pre *h=10* a *d=7* je splnený súčet 17 (príp. *h=7* a *d=10*).

Bodovanie: 1 bod za správny výsledok (aspoň určený počet všetkých súťažiacich) bezpostupu riešenia. 2 body za správny výsledok (aspoň určený počet všetkých súťažiacich) so zdôvodnením počtu všetkých účastníkov. 3 až 3,5 bodu za správny výsledok s čiastočným vysvetlením. 4 až 4,5 bodu za správny výsledok s výpočtovou chybou alebo logickým skokom v úvahe. 5 bodov za úplné riešenie. bodíky ste mohli získať za odôvodnenie svojich krokov ☺.

P-MATn.o.

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

NADÁCIA INGENIUM

podporuje odborný rast organizátorov seminára

PIKOMAT, 24. ročník šk. rok 2006/2007

PIKOMAT

Vzorové riešenia 1. série letnej časti, kategória 7-9

Príklad S1: Zotreté čísla. *Opravoval Martin „Panda“ Svetlík.*

a	×	b	-	c	= 6
+		+		+	
d	+	e	-	f	= 5
-		×		÷	
g	×	h	÷	i	= 3
=		=		=	
2		9		4	

Nakreslíme si tabuľku a (zotreté) čísla si označíme písmenami pre lepšiu orientáciu. Použijem také označenie, aké si zvolila väčšina z vás.
Najprv si ujasníme vetu, že rovnosti platili za predpokladu, že násobenie a delenie nemajú prednosť pred sčítaním a odčítaním. To neznamená, že prednosť majú sčítanie a odčítanie. Znamená to, že počítame jednoducho „zaradom“. Táto „zmena pravidiel“ sa dotkne iba rovností v druhom a treťom stĺpci, ktoré si môžeme teda zapísať takto: $(b + e) \times h = 9$ a $(c + f) \div i = 3$.
Začneme teda uvažovať. Odkiaľ začať? Hľadáme niečo jednoznačné. V prvých dvoch riadkoch a prvom stĺpci máme rozdiely 6, 5, 2. Tie sa dajú dostať veľa spôsobmi. V poslednom riadku a poslednom stĺpci sú podiely 3 a 4. To tiež vieme dostať veľa spôsobmi. V strednom stĺpci máme dostať 9 ako súčin. Existujú len dva spôsoby ako dostať 9 ako súčin dvoch prirodzených čísel. 3×3 a 9×1. Keby sme chceli použiť prvý spôsob, *b* a *e* by museli byť 1 a 2 (alebo 2 a 1) a *h* by bolo 3, lebo (1+2)×3=9. Iná možnosť neexistuje. Lenže, tu narazí kosa na kameň. Keby *h* bolo 3, a malo by platiť, že $g \times h \div i = 3$, po dosadení 3 za *h* by nám vyšlo, že *g* sa musí rovnať *i*, čo samozrejme nemôže, keďže každé číslo (1-9) musí byť použité práve raz.
Dobre, tak to bude inak. 1×9. Keďže $b + e$ nikdy nebude 1 – je to súčet dvoch prirodzených čísel, tak to musí byť 9 a $\underline{h = 1}$. Teraz vieme, že *g* je trojnásobkom *i* ($g \times 1 \div i = 3$). Teda to môžu byť len dvojice 6 a 2 alebo 9 a 3.
Skúsme $g = 6$ a $i = 2$. V prvom stĺpci nám vyjde, že $a + d = 8$ (lebo $a + d - 6 = 2$) a v treťom $c + f = 8$ (lebo $(c + f) \div 2 = 4$). Zo zvyšných čísel sa dá 8 „poskladať“ súčtom len ako 3 + 5, a to môžeme použiť len raz. Takže $g \neq 6$ a $i \neq 2$ a teda $\underline{g = 9}$ a $\underline{i = 3}$.
V troch stĺpcoch musíme dostať tri súčty. 11, 9 a 12. 11, to je zo zvyšných čísel 4 + 7 alebo 6 + 5. Ďalej 9 je 2 + 7 alebo 4 + 5. A 12 je 8 + 4 alebo 7 + 5. Keby bolo 11 ako 4 + 7, akú kombináciu by sme použili na 9 a 12? Žiadnu, lebo v každej je buď 4 alebo 7. Takže 11 bude 6 + 5, a teda 9 bude 2 + 7 a 12 bude 4 + 8. A v akom poradí budú tieto dvojice?
Ktoré z čísel *a, d* je 6, a ktoré 5? Keby *d* bolo 5, a malo by platiť, že $d + e - f = 5$, po dosadení 5 za *d* by nám vyšlo, že *e* sa musí rovnať *f*, čo samozrejme nemôže, keďže každé číslo (1-9) musí byť použité práve raz. Takže naopak, *a* bude 5 a 6 bude *d*. $\underline{a = 5}$ a $\underline{d = 6}$. Ostatné je už ľahké. *b* nemôže byť 7, lebo $a \times b$ by bolo príliš veľké, a teda $\underline{b = 2}$. Potom $\underline{e = 7}$, $\underline{d = 4}$ a $\underline{f = 8}$. Toto sme už dopočítali jednoducho z rovností v druhom stĺpci a prvých dvoch riadkoch.

5	×	2	-	4	= 6
+		+		+	
6	+	7	-	8	= 5
-		×		÷	
9	×	1	÷	3	= 3
=		=		=	
2		9		4	

Keď už máme všetko, môžme si nakresliť, ako to mal Rýchle Brko pred zotretím. Skontrolujeme si, či máme každé číslo práve raz... Máme. Juchú. A tým, že sme iné možnosti postupne vylučovali, sme si ukázali aj to, že toto je jediné riešenie.

Bodovanie: Za správny výsledok aj s úplným postupom bolo 5 bodov, z toho za samotný výsledok (tabuľku s číslami, alebo niečo) boli dva body. Za zdôvodnenie $h = 1$ bol ďalší bod. Ak ste ďalšie čísla „dosadili“ alebo ste na ne „prišli skúšaním“, ale nenapísali ste, ako ste skúšali, alebo či ste skúšali dosadiť aj niečo iné (či to nemá viac riešení), tak ste ďalšie body nedostali...

Príklad S2: Preprava indiánov. *Opravoval Michal „Kladivo“ Kováč.*

Dozvedel som sa, že si môžem zahrať hru podobnú ako tento príklad na internete. Môžete si ju skúsiť na adrese http://www.onlinegames.sk/game.php?game=269.
Skoro dvojnásobne rýchlejšie sa dala úloha riešiť zároveň od začiatku aj od konca. Dobrý nápad je označiť si osoby, napr. Statočný Orol = O, Šaman = Š, náčelník Siouxov S, Deti Siouxov S1 a S2, náčelník Komančov K, deti Komančov K1, K2.
Je dobré, aby najprv v plti išli dvaja a aby sa jeden vrátil. Keby išli dvaja náčelníci, jeden by sa vrátil a bol by s deťmi toho druhého. Jeden náčelník s hocikým takisto nemôže ísť, lebo mu deti ostanú s druhým náčelníkom. Preto pôjde Statočný Orol. A musí so sebou vziať šamana, ktorý nemôže byť s indiánmi bez Statočného Orla. Orol sa vráti späť.
Po ďalšej plavbe buď na druhom brehu neostane žiadny indián (takže len Statočný Orol a šaman), čím by sme si od predchádzajúcej plavby nepomohli, alebo ostane Statočný Orol a šaman a nejaký indián (dieťa, napr. S1, aby sa náčelníci mohli ostať strážiť). Vrátiť sa teda musí Statočný Orol so šamanom.
Ďalej musí ísť náčelník so svojím dieťaťom (S a S2). Teda všetci Siouxovia sú preplavení. Ako dostaneme plť na druhý breh? Spraví sa to kombináciou S - SK – K, náčelník Siouxov prejde na prvý breh, náčelník Komančov ho odprevadí na druhý breh a vráti sa.
Už sme skoro v polovičke. Keď sa teraz prevezie Statočný Orol so šamanom, nastane situácia podobná ako pred touto plavbou, ibaže je symetrická. Keď vymeníme brehy, a Siouxov-Komančov, dostaneme to isté rozloženie. Kazí to akurát plť. To sa spraví znova kombináciou S - SK – K. Komančovia sa prevezú podobne ako Siouxovia, takže len stručne: K, K1 na druhý breh, O, Š naspäť, O, K2 tam, O späť, O, Š tam. Hotovo. Iné riešenia vzniknú len vymenením Siouxov a Komančov.

Poznámky k došlým riešeniam: Viacerí ste sa ale snažili vyhnúť podmienke, že vodca Siouxov nemôže byť na tom istom brehu spolu so synom Komančov bez prítomnosti vodcu Komančov. Riešili ste to tak, že keď nemôžu byť na jednom brehu, môžu byť spolu na plti. Áno, to uznávam, môžu byť spolu na plti. Ale keď chce jeden z nich vystúpiť, kde sa nachádza plť? Predsa na brehu. A na ktorom brehu sa nachádza posádka plte? Na tom istom brehu...

Bodovanie: Za správne riešenie bolo 5 bodov. Za neúspešné hľadanie chýb v zadaní som nejaké body strhol. Predsa len by to bolo nespravodlivé voči tým, čo poctivo sa snažili nájsť riešenie. Za malé chyby, ale dobrý postup boli 3-4 body. Za využitie „chýb“ v zadaní, a za správne vyriešenie takto zjednodušenej úlohy ste mohli získať 2-3 body. Keď ste aj so zjednodušením mali chyby, prípadne veľmi slabý/chýbajúci postup, mohol počet bodov ešte viac klesnúť.

Príklad S3: Dúhová veža. *Opravovali Katarína „Kitty“ Korcsoková a Jarmilka Malíková.*

Príklad ste riešili viacerými spôsobmi. V prvom rade bolo potrebné zistiť, aké sú farby dúhy a v akom poradí sú usporiadané. Mnohí z vás použili ako zdroj informácií encyklopédiu, prípadne internet a dospeli k nasledujúcim farbám: 1. červená, 2. oranžová, 3. žltá, 4. zelená, 5. modrá, 6. indigová (prípadne tmavomodrá), 7. fialová. Potom bolo treba zistiť, z koľkých kociek sa veža skladala celkovo. Niektorí z vás si to zakreslili pohľadom zhora, iní tam hľadali postupnosť. Obrázok zachytáva prvú možnosť.

Z obrázku vyplýva, že dúhová veža sa po siedmich dňoch skladala z 231 kociek. Ďalej bolo potrebné zistiť, akej farby bola kocka, ktorú položili ako stú v poradí. Na to stačí, aby sa sčítali počty kociek, ktoré boli položené po konkrétnych dňoch:

Po 1.dni: 1 kocka

Po 2.dni: 1+5=6 kociek

Po 3.dni: 1+5+13=19 kociek

Po 4.dni: 1+5+13+25=44 kociek

Po 5.dni: 1+5+13+25+41=85 kociek

Po 6.dni: 1+5+13+25+41+61=146 kociek

Vidíme, že po piatom dni ich bolo len 85 a po šiestom dni ich bolo už 146, to znamená že vieme s istotou povedať, že stá kocka bola položená počas šiesteho dňa a je indigovej (tmavomodrej) farby.

						1						
					1	2	1					
				1	2	3	2	1				
			1	2	3	4	3	2	1			
		1	2	3	4	5	4	3	2	1		
	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	
1	2	3	4	5	6	7	6	5	4	3	2	1
	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	
		1	2	3	4	5	4	3	2	1		
			1	2	3	4	3	2	1			
				1	2	3	2	1				
					1	2	1					
						1						

Čísla v štvorčekoch predstavujú počet kociek poukladaných na seba na 7.deň - (ide o pohľad zhora).

Výsledný počet kociek dostaneme ako súčet všetkých čísel v štvorčekoch :

24.1+20.2+16.3+12.4+8.5+4.6+1.7=231

Bodovanie: Za správne riešenie aj s postupom ste mohli získať 5 bodov. Ak ste spravili malú chybu pri hľadaní 7 farieb dúhy, ale ste správne určili aspoň deň, počas ktorého položili stú kocku, strhávali sme buď 0,1 bodu (ak ste sa pomýlili v niektorej z farieb), alebo 0,3 bodu (ak ste sa farby ani nepokúsili nájsť). 0,5 bodu sme strhli, ak nebola vo vašom riešení uvedená jasná odpoveď. V prípade, že ste zle spočítali počet kociek alebo ste nesprávne postupovali pri hľadaní farby stej kocky, prípadne ste tú farbu vôbec nehľadali, strhli sme 2 body. Výnimkou bolo, ak ste pri určovaní farby postupovali správne, ale ste ju zle určili vychádzajúc pri tom zo zlého súčtu kociek – vtedy sme strhli za zle určenú farbu stej kocky len 1 bod. 4 body sme strhli vtedy, ak ste uviedli len odpoveď, ale tá nebola vôbec zdôvodnená – chýbal akýkoľvek postup.

Príklad S4: Zaujímavé kamene. *Opravovala Kaťa Smolárová.*

Najprv si musíme uvedomiť, že dráhy, po ktorých sa pohybujú jednotlivé vrcholy trojuholníka sú časti kružníc. Samozrejme, vždy sa hýbu iba 2 z bodov trojuholníka, keďže okolo tretieho trojuholník preklápame (a teda je stredom kružnice, po ktorej sa pohybujú ostatné 2 body). Narysujme si teraz dráhy jednotlivých vrcholov (obr.).
Z obrázku vidíme, že dráhy vrcholov, ktoré boli na začiatku priložené k strane trojuholníka sú rovnako dlhé, pretože sú osovo súmerné. Potrebujeme vypočítať ako dlhá táto dráha je. Dĺžka dráhy je úmerná veľkosti uhla α, o ktorý sa vrcholy otáčajú, pretože dĺžka kružnicového oblúka daného uhlom α je rovná 2.π.r.(α/360˚), ale okrem α sú to všetko konštanty. Takže bude stačiť, keď sa pozrieme na veľkosti uhlov.
Vidíme, že vrcholy sa otáčajú o 2 rôzne uhly. Vypočítame ich nasledovne:
Väčší z nich → od uhla 360° odpočítame 60° (uhol rovnostranného trojuholníka) a 90° (uhol obdĺžnika), teda uhol má veľkosť *360° - 60° - 90° = 210°*.
Menší z nich → od uhla 180° odpočítame 60° (uhol rovnostranného trojuholníka), teda má veľkosť *180° - 60° = 120°*.
Pri prvých dvoch dráhach sa o každý z týchto uhlov vrchol otočí dvakrát, takže celkovo sa každý z týchto dvoch vrcholov otočí o *2.210° + 2.120° = 660°*.