Ak si totiž očíslujeme riadky šachovnice od 1 po 9, potom v každom nepárnom riadku je 5 čiernych polí a na každom párnom riadku sú len 4 čierne polia. Ak sa však pes pred signálom nachádzal na párnom riadku – po signále sa musí nachádzať na nepárnom riadku. Takisto – pes, ktorý sa nachádzal na nepárnom riadku pred sa po signále musí nachádzať na párnom riadku. Teraz už len stačí spočítať koľko psov bolo na začiatku na nepárnych riadkoch a koľko na párnych. Dostaneme 25 nepárnych oproti 16 párnym – z čoho je zrejmé, že po signále sa na nepárnych riadkoch bude nachádzať len 16 psov a teda 9 čiernych políčok bude musieť ostať neobsadených.
Keďže obrázok nám ukazuje ako obsadíme všetky čierne políčka až na 9, ktoré sú na hornom a pravom okraji šachovnice, je zrejmé, že celkové hľadané minimum je 9.

Bodovanie: 5 bodov za správne riešenie aj s dôkazom, 4 body za správne riešenie s neúplným dôkazom, 3 body za správne riešenie a náznak dôkazu, 2 body za výsledok 10 až 16, ak je popísaný presun psov, 1 bod za výsledok 17, 0 bodov za iný výsledok ako 9 až 17.

Príklad S5: Osvetlené fľaše. *Opravovala Anka Zahoranová.*

V prvom rade treba uvážiť, koľkokrát môže Meredit skriňu otvoriť, aby bolo víno v nej vhodné na pitie. Víno možno osvetliť 10-krát. Prvýkrát sa osvetlí pri nákupe. Druhýkrát pri otvorení skrine. Osvetlia sa všetky fľaše, čiže aj tá, ktorú Meredit vyťahuje. Tretíkrát sa víno osvetlí pri konzumácií. Čiže dvierka na skrini sa môžu otvoriť 8krát, potom je už víno nepitné(1 osvetlenie - nákup, 8 osvetlení - otváranie skrine, 1 osvetlenie - pitie, dokopy 10 osvetlení). V riešeniach mnohých z vás osvetlenie pri konzumácii a osvetlenie pri výbere zo skrine splynuli v jedno, čiže skriňa sa môže otvoriť 9-krát. No pozor, mohlo to spôsobiť rozdiel až 9 dní..
Presuňme sa k spôsobu otvárania skríň. Väčšina z vás nerátala s inou možnosťou než postupné vyberanie fliaš najprv z jednej, potom z druhej skrine. No najvýhodnejšie je premiestňovať fľaše z jednej skrine do druhej. Z jednej budeme vyberať fľašky každý deň, druhú otvoríme, len keď sa prvá skriňa minie a bude ju treba znova naplniť. Tak si to skúsme. Kúpili sme fľaše, jednu sme rovno nechali vonku na večer, do jednej skrine sme dali 8 fliaš, maximálny počet, do druhej sme dali veľa zvyšných. Po 8 dňoch je prvá skriňa prázdna, preto otvárame druhú, jednu fľašku si rovno odložíme na ten večer. Fľaše v skrini boli osvetlené už dvakrát, pri nákupe a pri prvom premiestnení, a ešte budú raz počas večerného pitia, takže maximálny počet otvorení skrine sa zníži na 7. Keď sa týchto 7 fliaš minie, postup sa opakuje, len s nižším počtom 6. Tento počet sa vždy zníži o jedna.
1 (po nákupe otvorená)+8 (prvý počet otvorení)+1 (fľaša otvorená pri prvom presune z jednej do druhej skrine)+7 (druhý počet)+1+6+1+5+1+ 4+1+3+1+2+1(fľaša vybraná pri poslednom presune)+1(posledná fľaša prvej skrine)+1(posledná fľaša druhej skrine) = 45 fliaš.
Mohlo vám vyjsť o jednu menej, ak ste otvárali skriňu kvôli výberu fľaše už v deň nákupu, ale to nie je zásadná chyba.

Bodovanie: Za výsledok 45, resp. 44 bolo 5 bodov. Ak ste počítali s deviatimi fľašami v skrini, tak som vám strhla 0,5 bodu. Ak ste neprenášali fľaše z jednej skrine do druhej, len zdvojnásobili max. počet fliaš v jednej skrini, tak to bolo za 2-2,5 bodu. Za nedostatočné zdôvodnenie -0,5 bodu.

organizátor korešpondenčného   podporuje odborný rast

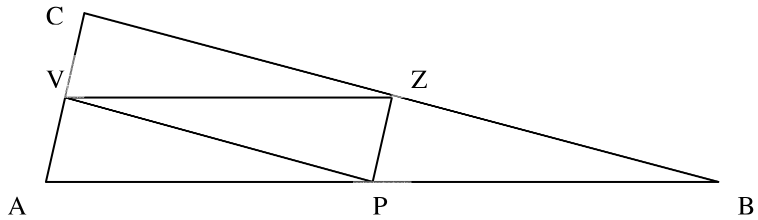
seminára Pikomat   organizátorov seminára

PIKOMAT, 24. ročník

PIKOMAT

Vzorové riešenia 3. série zimnej časti, kategória 7-9

Príklad S1: Útek. *Opravoval Michal „Kladivo“ Kováč.*



Ako prvé je treba si uvedomiť, že PZCV je obdĺžnik*, lebo uhol ACB je pravý, PV a PZ sú kolmice na AC a BC. Štvorec je len špeciálny prípad, my to musíme vyriešiť všeobecne pre každý pravouholník. Vieme, že v pravouholníku majú uhlopriečky rovnakú dĺžku*. U nás |VZ|=|PC|. A kedy je úsečka PC najkratšia pre daný trojuholník („Daný trojuholník“ znamená, že je daná úsečka AB a je daný bod C.)? Najkratšia vzdialenosť bodu a priamky je kolmica**. Preto bod P je pätou výšky na stranu *c* a keďže ABC je pravouhlý, päta výšky leží vždy na úsečke AB.
Pre fajnšmekrov: Prečo je kolmica najkratšou vzdialenosťou medzi bodom a priamkou? Dokázať sa to dá napríklad tak, že si zostrojíme kolmicu na AB cez C (pätu kolmice si označíme P) a zostrojím inú spojnicu s C (prienik s AB si označím P´). Trojuholník CPP´ je pravouhlý s pravým uhlom pri P, preto PP´ je prepona, ktorá je v pravouhlom trojuholníku vždy najdlhšia. Kolmica, ktorá je odvesnou v tomto trojuholníku, je teda vždy kratšia.

Bodovanie: Za správne riešenie bolo aspoň 1,5 bodu, ale keď ste k tomu ešte niečo napísali, určite to číslo vyskočilo aj vyššie. Za každú hviezdičku v predchádzajúcom texte ste mohli získať 1 bod, zvyšné body boli za nejaké ďalšie zaujímavé myšlienky. Dôkaz, že kolmica je naozaj najkratšia spojnica bodu s úsečkou spravili len niektorí. Takisto diskusia, že úloha má len jedno riešenie v rovine, sa vyskytla len málo. 1 bod som strhával za chýbajúci náčrt, ale to len v prípade, keď bolo riešenie neprehľadné a naozaj náčrt vyžadovalo.

Príklad S2: Rozmazané čísla. *Opravoval Michal „Kesy“ Kesely.*

Skúsme si vypísať prvých pár členov nejakej konkrétnej postupnosti. Zoberme prvé členy postupnosti napríklad ako 5 a 10. Potom prvých 10 členov takejto postupnosti by bolo: *5, 10, 1/2, 1/5, 1/10, 2, 5, 10, 1/2, 1/5*. Dostávame vážne podozrenie, že členy sa budú po šiestich opakovať. Toto tvrdenie ale treba dokázať všeobecne. Takže si označme prvé dva členy postupnosti ako a_1 a a_2. Z pravidla, že číslo je súčinom svojich susedov, máme: $a_3=a_2/a_1$, $a_4=a_3/a_2=1/a_1$, $a_5=a_4/a_3=1/a_2$, $a_6=a_5/a_4=1/a_3=a_1/a_2$, $a_7=a_6/a_5=a_1$ a $a_8=a_7/a_6=a_2$.

Keďže číslo v postupnosti je jednoznačne určené svojimi dvoma predchodcami (skúste si rozmyslieť, prečo), už teraz je jasné, že opakovanie sa porušiť nemôže. V postupnosti sa teda naozaj opakuje len istá šestica čísel.
Čo si všimneme ako ďalšie je, že súčin týchto šiestich čísel je 1. To však znamená, že súčin *ľubovoľných* 6 čísel idúcich za sebou je 1. Potom ale súčin ľubovoľných 36 (alebo 78) za sebou idúcich čísel je 1, pretože 36 (alebo 78) je násobkom čísla 6 – dostaneme len súčin niekoľkých jednotiek. Teda súčin čísel a_5 až a_{40} (týchto je 36) je 1 a podobne súčin čísel a_3 až a_{80} je 1 (týchto čísel je 78). To ale znamená, že súčin čísel a_1 až a_4 je 32 a súčin čísel a_1 a a_2 je 16.
Keď sa pozrieme na prvky postupnosti, tak vidíme, že $a_4=1/a_1$, teda $a_1.a_4=1$. Z toho teda vyplýva, že $a_2.a_3=32$. Za a_3 si môžeme dosadiť a_2/a_1, čo vedie k rovnici $a_2^2/a_1=32$. Zároveň ale $a_1.a_2=16$.
Vynásobme obe rovnice, čím sa zbavíme členu a_1 a dostaneme $a_2^3=512$. Hľadané číslo a_2 je teda 8, po krátkom dopočítaní dostaneme číslo $a_1=2$.
Rozmazané teda boli čísla 2 a 8.

Bodovanie: Pokiaľ ste prišli na opakovanie 6 členov postupnosti vo všeobecnom prípade, máte 2 body. Ak ste na to prišli skúmaním nejakých konkrétnych postupností, máte za túto časť maximálne bod. Za zistenie, že ich súčin je 1 bol ďalší bod. Za úpravy a dopočítanie hodnôt bol 1 bod. A posledný bod bol za správnu odpoveď.

Príklad S3: Čísla a policajti. *Opravoval Martin „Kotanyi“ Godány.*

Začnime tým, že si napíšeme prvočíselný rozklad všetkých možných deliteľov čísla, ktoré mohlo byť napísané na tabuli: *2 = 2, 3 = 3, 4 = 2.2, 5 = 5, 6 = 2.3, 7 = 7, 8 = 2.2.2, 9 = 3.3, 10 = 2.5, 11 = 11, 12 = 2.2.3, 13 = 13*. Z týchto prvočíselných rozkladov dokážeme určiť, ktorými číslami naše hľadané číslo muselo byť deliteľné, a ktorými nie.
Pokiaľ by sa mýlil policajt, ktorý tvrdil, že číslo na tabuli je deliteľné dvoma, znamenalo by to, že číslo by nemohlo byť deliteľné ani číslami 4, 6, 8, 10 a 12 (pretože by bolo nepárne). Lenže mýlili sa *práve dvaja* policajti, a takto by ich bolo až šesť. Takže naše číslo musí byť deliteľné dvoma. Z rovnakého dôvodu je číslo deliteľné aj číslami 3 a 4.
Pri päťke sa dostávame do ťažkostí. Totiž, pokiaľ by číslo na tabuli nebolo deliteľné piatimi, nebolo by deliteľné ani desiatimi. To sú práve dvaja mýliaci sa policajti. Ale pokiaľ by deliteľné piatimi bolo, bolo by rovnako deliteľné aj desiatimi. Skúsme preto zistiť, aký je najmenší spoločný násobok čísel 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12 a 13. Pokiaľ bude väčší než 50 000, znamená to, že naše číslo musí byť deliteľné aj číslom 5 (a teda aj číslom 10), inak by neboli splnené všetky podmienky úlohy. Najmenší spoločný násobok vyššie uvedených čísel je: *2.2.2.3.3.7.11.13 = 72 072*. Keďže je väčší než 50 000, číslo musí byť deliteľné aj päťkou, aj desiatkou.
Doteraz sme zistili, že číslo na tabuli musí byť deliteľné číslami 2, 3, 4 a 5. Spravme si ich najmenší spoločný násobok: *2.2.3.5 = 60*. Ako vidíme, je deliteľný číslami 2, 3, 4, 5, 6, 10 aj 12. Takže čísla 6, 10 a 12 už nemusíme overovať, vieme, že naše číslo nimi musí byť deliteľné. Treba teda overiť čísla 7, 8, 9, 11 a 13.
Teraz musíme vytvoriť dvojice zo všetkých čísel, v ktorých sa policajti zmýlili. Ku každej dvojici napíšeme, v ktorých číslach sa policajti nepomýlili.

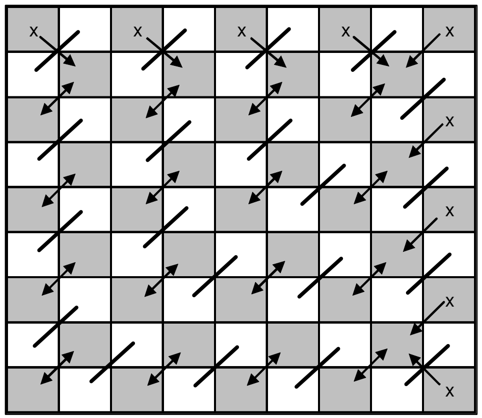
Mýlili sa	Nemýlili sa	Rozklad a najmenší spoločný násobok
7, 8	9, 11, 13	*60.3.11.13 = 25 740*
7, 9	8, 11, 13	*60.2.11.13 = 17 160*
7, 11	8, 9, 13	*60.2.3.13 = 4 680*
7, 13	8, 9, 11	*60.2.3.11 = 3 960*
8, 9	7, 11, 13	~~*60.7.11.13 = 60 060*~~ *(vyššie ako 50 000)*
8, 11	7, 9, 13	*60.7.3.13 = 16 380*
8, 13	7, 9, 11	*60.7.3.11 = 13 860*
9, 11	7, 8, 13	*60.7.2.13 = 10 920*
9, 13	7, 9, 11	*60.7.3.11 = 9 240*
11, 13	7, 8, 9	*60.7.2.3 = 2 520*

Vyššie uvedené čísla však nie sú všetky možnosti. Rovnako dobré sú aj ich násobky, avšak musíme si pri ich násobení dať pozor na dve veci. Nesmieme presiahnuť hranicu 50 000 a nesmieme ich vynásobiť číslom (alebo jeho násobkom), o ktorom vieme, že sa v ňom policajti pomýlili (pokiaľ by sme tak urobili, porušili by sme podmienku zo zadania, že naše číslo musí byť deliteľné práve dvoma číslami od 2 po 13).
Takže teraz zistíme aj zvyšné riešenia. Nevypisujem súčiny, ktorých výsledok je väčší než 50 000, alebo v ktorých je činiteľom číslo, v ktorom sa policajti zmýlili.
25 740
17 160; 17 160 . 2 = 34 320
4 680; 4 680.2 = 9 360; 4 680.3 = 14 040; 4 680.4 = 18 720; 4 680.5 = 23 400; 4 680.6 = 28 080; 4 680.8 = 37 440; 4 680.9 = 42 120; 4 680.10 = 46 800
3 960; 3 960.2 = 7 920; 3 960.3 = 11 880; 3 960.4 = 15 840; 3 960.5 = 19 800; 3 960.6 = 23 760; 3 960.8 = 31 680; 3 960.9 = 35 640; 3 960.10 = 39 600; 3 960.11 = 43 560; 3 960.12 = 47 520
16 380; 16 380.3 = 49 140
13 860; 13 860.3 = 41 580
10 920; 10 920.2 = 21 840; 10 920.4 = 43 680
9 240; 9 240.2 = 18 480; 9 240.4 = 36 960; 9 240.5 = 46 200
2 520; 2 520.2 = 5 040; 2 520.3 = 7 560; 2 520.4 = 10 080; 2 520.5 = 12 600; 2 520.6 = 15 120; 2 520.7 = 17 640; 2 520.8 = 20 160; 2 520.9 = 22 680; 2 520.10 = 25 200; 2 520.12 = 30 240; 2 520.14 = 35 280; 2 520.15 = 37 800; 2 520.16 = 40 320; 2 520.17 = 42 840; 2 520.18 = 45 360; 2 520.19 = 47 880
Spolu je týchto čísel 51.

Bodovanie: 5 bodov za nájdenie všetkých 51 riešení. Čím menej riešení ste našli, tým menej bodov ste dostali. Za nevysvetlený postup som strhal 0,5 bodu, za numerickú chybu som strhal 0,8 bodu.

Príklad S4: Psy a šachovnica. *Opravovala Vlasta „Krupla“ Gubášová.*

Začneme úvahou: „najefektívnejšie“ presúvanie psov (teda to, pri ktorom ostane minimum voľných polí) je také, pri ktorom sa psy navzájom (po dvojiciach) vymenia (upozornenie: na signál *musí* každý pes opustiť svoje miesto). Ak teda dokážeme rozdeliť psov na dvojice, ktoré si vymenia svoje miesta, potom dosiahneme to, čo požaduje úloha.



Šachovnicu rozdelíme na čierne a biele polia po diagonálach. Takéto rozdelenie zabezpečí, že psy na čiernych poliach po signále prejdú opäť na čierne polia a psy na bielych poliach prejdú na biele polia. Celú úlohu teda vieme rozdeliť na dve nezávislé úlohy – jednu pre presúvanie bielych psov a druhú pre presúvanie čiernych psov. Pretože šachovnica má rozmery 9x9, rýchlo sa presvedčíme, že hlavné diagonály (teda tie, ktoré sa začínajú v rohových políčkach šachovnice) musia mať rovnakú farbu. Dohodnime sa, že táto farba bude čierna.
Najprv poďme presúvať „bielopoľných“ psov. Na obrázku vidíme ako psov rozdelíme do dvojíc, a tým aj vyriešime problém, ako zabezpečiť úplné pokrytie bielych polí šachovnice. Dvojica je pritom označená diagonálnou čiarkou bez koncových šípiek.
U čiernych psov je riešenie ťažšie, pretože tam nevieme všetkých psov spárovať do dvojíc tak aby si navzájom vymenili miesta. Dôkaz toho, že sa to nedá je však veľmi jednoduchý.