3,5 b ak sa síce dostali až k 21, ale nakoniec ste tie možnosti sčítali

2,5 b ak ste zdôvodnili, že príklad nemá riešenie(znie to trochu odveci, ale v kombinácií s možnosťou 27 sa z toho dostane správny výsledok)

veľmi málo bodov za veľmi málo vecí (a ešte menej bodov, ak ste ich nemali zdôvodnené)

Príklad S5: Chrumky *opravovala Maťa Hojčková*

Takže vieme, že Martin (M) a Viktor (V) zjedia svoj balíček za 30 sekúnd, M a Alica (A) spolu zjedia za 24 sekúnd a všetci traja spolu ho zjedia za 20 sekúnd. Najlepšie urobíme, ak si vyjadríme časť balíčka, ktorú zjedia jednotlivé osoby za 1 sekundu.

30M + 30V = 1

24M + 24A = 1

20V + 20M + 20A = 1

Jeden z možných spôsobov je upraviť si všetky koeficienty tak, aby boli rovnaké a dobre sa s nimi počítalo. Najmenší spoločný násobok 24, 20 a 30 je 120, tak si všetky čísla na ľavej strane rovníc upravíme:

120M + 120V = 4

120M + 120A = 5

120V + 120M + 120A = 6

Sčítajme horné dve rovnice a odčítajme od nich tretiu (to urobiť môžme) a dostaneme 120M = 3, teda M = 1/40. Potom z prvej rovnice dopočítame V, lebo už vieme, že 3 + 120V = 4, teda 120V = 1 (a potom V = 1/120). Podobne 120A = 2 (a z toho A = 1/60).

Postupnými úpravami sme zistili, že Martin zje za 1 sekundu 1/40 balíčka (celý balíček zje za 40 sekúnd), Alica 1/60 balíčka (celý za 60 sekúnd) a Viktor 1/120 balíčka (celý balíček za 120 sekúnd).

Alica a Viktor jedli spolu a jedli rovnaký čas (napr. *T*). Potom T.(1/120) + T.(1/60) = 1. Z toho dostaneme riešenie T = 40, teda spolu zjedia balíček za 40 sekúnd.

Teraz zistíme, ako dlho celkovo jedol Viktor. S Alicou jedol 40s, s Martinom jedol 30 s a so všetkými jedol 20s => spolu jedol 90 sekúnd. Jeho rýchlosť jedenia je 1/120 balíka za sekundu: (1/120).90 = 90/120 = 3/4 = 0,75. Viktor teda zjedol za celú súťaž 0,75 balíka chrumiek.

Pointa spočívala v tom, že keď dvaja ľudia jedia 1 balík 30 sekúnd, tak to neznamená, že každý z nich jedol 15 sekúnd a zjedol polovicu balíčka, ako si mnohí z vás mysleli. Išlo práve o to zistiť, kto ako rýchlo jedol.

Bodovanie: 1 bod za to, keď ste prišli vôbec na túto "pointu" , 2 body za postupy k 1. a 2. časti príkladu, 2 body za správne odpovede.

PIKOMAT ,23. ročník **šk. rok 2005/2006**

organizátor korešpondenčného seminára

podporuje odborný rast organizátorov seminára

Vzorové riešenia 1. série zimnej časti kategórie 7-9

Príklad S1: Táborák *opravoval Peťo Halák*

Predstavme si ohnisko okolo ktorého bolo 256 kameňov. Kamene odoberali postupne „na preskačku", to znamená, že v prvom kole odobrali kamene s číslami 1, 3, 5, 7, ..., 253, 255. Po prvom kole zostali násobky 2 (teda párne kamene). Keďže 256. kameň preskočili a prvý tam už nebol, tak zobrali v druhom kole kameň č. 2, potom 6, 10, atď. Takto pokračovali aj v ďalších kolách.

Po druhom kole zostali kamene očíslované násobkom 4 (4, 8, 16, 20, 24, ..., 252, 256).

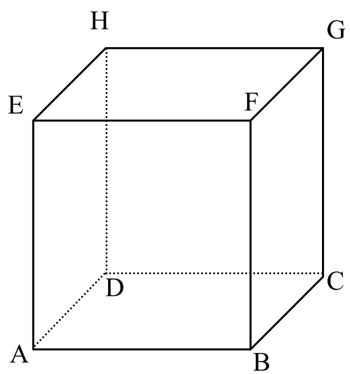
Po treťom kole zostali kamene očíslované násobkom 8 (8, 16, 24, 32, 40, ..., 248, 256).

Po štvrtom kole zostali kamene očíslované násobkom 16 (16, 32, 48, 64 ..., 240, 256).

Takto pokračovali ďalej, až kým po siedmom kole im zostali kamene 128 a 256. Odobrali 128. kameň a na záver im zostal 256. kameň. Zdrojom ich údivu bolo, že aj takýmto postupom zostal kameň s najvyšším číslom. Samozrejme toto neplatí pre ľubovoľné číslo, ale len pre mocniny dvojky (čísla, ktorých rozklad na prvočísla obsahuje samé dvojky).

Bodovanie: 5 bodov za správny postup aj výsledok, za menšie chyby v postupe som strhával max. 2 body. Za riešenia na základe neúplne pochopeného zadania – max. 2 body.

Príklad S2: **Upírí problém** *opravoval Stanislav „Stanči" Švéda*



1.

Obeť a upír sa nachádzajú v protiľahlých rohoch, kedže je kocka stredovo súmerná tak za protiľahlé rohy považujeme vrcholy ktoré tvoria telesovú uhlopriečku, čiže AG, BH, CE, DF. Toto sú 4 začiatočné pozície na ktorých sa naše postavy na začiatku nachádzajú.

Prvý krok má upír, ktorý sa pohne na jeden zo susedných rohov, ale obeť nikdy nechytí pretože jej stačí, aby sa vždy pohla tak aby nastala jedna zo začiatočných pozícii.

Ak bude upír rúcať chodby tak vyhrá. Obeť bude postupovať rovnakým spôsobom ako v prvom prípade, lenže v tomto prípade narazí obeť skôr či neskôr na slepú uličku. Teraz záleží len na upírovej šikovnosti, ako rýchlo obeť chytí. Najrýchlejší spôsob je pohybovať sa spôsobom ako v tomto prípade:

Upír v A, obeť v G

U: **A**→D→H→G→F→E alebo B, podľa toho kam išla obeť

O: **G**→F→B→A→E alebo B

Dokopy je to 5 ťahov.

Dlhší spôsob:

U: **A**→D→C→B→F→E (alebo G) →H (chytil obeť)

O: **G**→F→E→H→D→H (nemá inú možnosť)

Dokopy to je 6 ťahov.

2.

Za protiľahlé rohy by sme mohli považovať aj protiľahlé rohy na jednom poschodí, napr. AC, alebo jeden na jednom poschodí a druhý na druhom, napr. AH. V tomto prípade platí pre obeť podobný postup ako na začiatku, stačí aby sa pohla tak, aby 'videla' na upíra cez uhlopriečku niektorej steny.

Ak by tu upír rúcal chodby, opäť obeť chytí, ale potrvá mu to dlhšie (to si skúste ukázať sami).
Bodovanie: Za správne riešenie bol jeden bod, za postup v oboch častiach príkladu po 2 body.

Príklad S3: Súhvezdia *opravovala Vlasta „Krupla" Gubášová*

Vrcholy malého trojuholníka rozdeľujú dve strany veľkého trojuholníka na polovice, čo znamená, že tvoria strednú priečku. Preto je táto strana malého trojuholníka rovnobežná s protiľahlou stranou veľkého trojuholníka a má polovicu jej veľkosti. Keďže tretí bod malého trojuholníka delí túto stranu v pomere 1:3 je jeho vzdialenosť od najbližšieho vrcholu veľkého trojuholníka rovná štvrtine veľkosti tejto strany, čiže polovici veľkosti strednej priečky. Teraz už vieme postup konštrukcie veľkého trojuholníka:

1. Tretím vrcholom malého trojuholníka vedieme rovnobežku so strednou priečkou veľkého trojuholníka (teda s protiľahlou stranou malého trojuholníka)
2. V treťom vrchole malého trojuholníka zostrojíme kružnicu s polomerom polovice strednej priečky. Tá pretne vytvorenú rovnobežku v dvoch rôznych bodoch.
3. V každom z týchto bodov vieme naniesť na vytvorenej rovnobežke úsečku o dvojnásobnej dĺžke strednej priečky tak aby na nej ležal tretí vrchol malého trojuholníka. Takto sme zostrojili dve možnosti jednej strany veľkého trojuholníka.
4. Tretí vrchol zostrojíme ako prienik polpriamok vedúcich z koncových bodov vytvorenej úsečky cez príslušné vrcholy strednej priečky.
5. Je zrejmé, že úloha má vždy dve riešenia.

Bodovanie:

5 bodov za správny postup s dostatočným odôvodnením a oboma symetrickými riešeniami; 4,5 boda za správny postup s dostatočným odôvodnením a s jedným riešením; 4 body za správny postup s nedostatočným odôvodnením a s jedným riešením; 3 body za neúplný postup; 0 bodov za nesprávne riešenie alebo nesprávne pochopenie zadania.

Príklad S4: Stavebnicu *opravovala Anka Zahoranová, riešenie podľa Viktora Popoviča*

Chceme zistiť, koľko kvádrov s rôznym počtom kociek s rozmermi 2x2x2 možno vytvoriť. Keďže každá taká kocka sa dá nahradiť ôsmimi menšími (2x2x2=8), nie je problém počet dvojkových kociek zmenšiť. Takže treba zistiť, aký najväčší počet dvojkových kociek sa zmestí do kvádra s objemom 210. Tu robili mnohí chybu. Nestačí len vydeliť objem ôsmimi, treba brať ohľad na každý rozmer samostatne. Takže 210:8 je síce 26 a 2 malé kocky zvyšok, ale dve malé kocky nedoplníte k 26 väčším, aby vám vyšiel celistvý kváder...

Treba si vypísať možné rozmery kvádra. Rozmery, v ktorých je jednotka, môžeme vynechať, pretože tam sa žiadna kocka so stranou dva nezmestí. Aby sme nejakú možnosť nevynechali, dobre poslúži rozklad na prvočísla (210 = 2x3x5x7).

Možné rozmery kvádra sú teda: 2x15x7; 2x3x35; 2x5x21; 3x7x10; 3x5x14; 5x6x7

Počet kociek 2x2x2, ktoré sa do kvádra zmestia, zistíme tak, že každý rozmer vydelíme 2 (na zvyšok nemusíme brať ohľad, medzera sa vyplní jednotkovými kockami) a potom rozmery navzájom vynásobíme.

Teda:

2x15x7........................1x7x3=21 kociek

2x3x35........................1x1x17=17 kociek

2x5x21........................1x2x10=20 kociek

3x7x10........................1x2x7=14 kociek

3x5x14........................1x3x5=15 kociek

5x6x7..........................2x3x3=18 kociek

Najviac kociek je 21 (kváder s rozmermi 2x15x7), takže počet kociek, a tým aj možných kvádrov, je v rozpätí 0 až 21, čiže dokopy 22 možností...

Bodovanie: 5 bodov bolo za správny výsledok (22), alebo za výsledok 21 (niektorí ste nerátali nulu ako možný počet kvádrov), ak ste to nemali dostatočne odôvodnené, tak 4 b

3 b za výsledok 26 alebo 27 (pri ňom ste nebrali do úvahy jednotlivé rozmery kvádra, ale len objem celkovo)

2 b za výsledok 6 alebo 7 (tu ste trochu zle pochopili zadanie, hľadali ste rôzne rozmery kvadrov, nie rôzne počty kociek v nich)

2 b ak ste spočítavali možnosti najväčšieho počtu kociek pri každom kvádri rôznych rozmerov