PIKOMAT

Vzorové riešenia 2. série letnej časti, kategória 7-9

Príklad S1: Vysielačka. *Opravoval Pavol „Tamarka“ Hronský.*

Baterka vo vysielačke sa vybíjala počas dvoch dejov:
1. keď Guinevera telefonovala, a to rýchlosťou 1/6 celkovej kapacity baterky za 1 hodinu.
2. keď vysielačka len tak ležala, vtedy rýchlosťou 1/210 celkovej kapacity baterky za 1 hodinu.

Tiež je dôležité si uvedomiť, že tieto deje sa nemohli diať naraz. Keď si označíme čas trvania cesty ako *X*, polovica trvania cesty bude (*X*/2). Na to, aby sme vybili celú 1 baterku, zostavíme rovnicu:

$$\left(\frac{X}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{X}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{210}\right)=1$$

Prečo? Vysvetlenie je nasledovné: vieme, že pri telefonovaní sa za jednu hodinu vybije presne 1/6 celej baterky. Taktiež vieme, že Guinevera telefonovala presne (*X*/2) hodín. Čiže keď vynásobíme rýchlosť vybíjania počtom hodín, zistíme, celkovo aká časť baterky sa vybila iba telefonovaním. To isté potom platí pre vybíjanie počas „ničnerobenia“ – trvalo presne (*X*/2) hodín a každú hodinu sa vybila 1/210 celej baterky. Vynásobením zistíme, aká časť baterky sa vybila počas ničnerobenia.

No a keďže na začiatku bola baterka plná a na konci úplne prázdna, súčet týchto dvoch vybíjaní musí byť 1 – minula sa jedna celá baterka. Teraz už iba upravovaním tejto rovnice zistíme hodnotu *X*:

$$\left(\frac{X}{12}\right)+\left(\frac{X}{420}\right)=1 \quad \rightarrow \quad 35X+X=420 \quad \rightarrow \quad X=\frac{420}{36}=\frac{35}{3}=11\frac{2}{3}$$

Výsledný čas predstavuje **11 hodín a 40 minút (700 minút)**. Čiže Guinevera pretelefonovala 5h a 50min (350min) a rovnaký čas ostal vysielačke, aby sa dovybíjala sama. Dá sa to skontrolovať aj takouto úvahou: povieme si, že každá 1 minúta telefonovania minie rovnako veľa z baterky, ako 35 minút samovybíjania. Keď Guinevera ušetrí 10min na telefonovaní – teda bude telefonovať len 350min z možných 360min (6 hodín) – ostane baterke 10×35 = 350min na samodovybíjanie. Skúška nám vyšla a cesta džípom trvala **700min**, alebo **11h a 40min**, alebo **11,66 periodických h**.

Bodovanie:

správny výsledok aj vysvetlený postup – 5b.;
nesprávny výsledok, ale (aspoň sčasti) dobrý postup – okolo 3b.;

Príklad S2: Vojenská hliadka. *Opravovala Katarína Beláková*.

Príklad nevyžadoval zložité vypisovanie čísel do štvorca 10×10 (týchto možností je veľmi veľa), stačilo sa poriadne zamyslieť.

Sú presne 3 možnosti vzájomnej pozície Akenhatena a Horemheba.

1. Nachádzajú sa v rovnakom rade: Akenhaten je najvyšší vo svojom rade, preto musí byť aj vyšší ako Horemheb.

2. Nachádzajú sa v rovnakom stĺpci: Horemheb je najnižší vo svojom stĺpci, preto musí byť aj nižší ako Akenhaten.

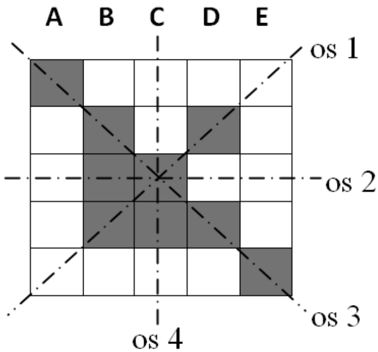
3. Nie sú ani v rovnakom stĺpci, ani v rovnakom rade: v tomto prípade však existuje vojak, ktorého „majú spoločného" – je v rovnakom rade ako Akenhaten a v rovnakom stĺpci ako Horemheb. Zo spôsobu, akým sme vojakov vyberali, jasne vyplýva, že tento vojak je nižší ako Akenhaten a zároveň vyšší ako Horemheb. To je možné iba vtedy, keď je Akenhaten vyšší ako Horemheb. **Akenhaten je teda vyšší ako Horemheb**, nech už je rozostavenie vojakov akékoľvek.

Bodovanie:

správna odpoveď – 1b.; odôvodnenie a správne úvahy – 4b.

Príklad S3: Prívesok. *Opravovala Alexandra „Saša" Porembová.*

Najprv si musíme uvedomiť, že prívesok môže byť súmerný podľa štyroch osí (Obr. 1), pretože je to štvorec. Teraz budeme postupne dopĺňať kamene tak, aby sme našli prívesky súmerné podľa jednotlivých osí.



Obr. 1

Os 1:

Podľa tejto osi už prívesok súmerný je, a teda kamene musíme vkladať tak, aby sme súmernosť neporušili.

Keď chceme vložiť práve jeden kameň. Musíme ho položiť na os súmernosti, ktorá ho rozdelí na dve polovice (inak by nemal svoj súmerný „pár"). Na osi 1 sú iba dve voľné miesta, takže máme práve **dve možnosti**: na A5 alebo E1.

Keď chceme vložiť práve dva kamene. Buď musia byť oba na osi súmernosti (**jediná možnosť** A5+E1), alebo byť podľa tejto osi súmerné. Na jednej strane od osi je 7 voľných miest, takže existuje 7 osovo súmerných dvojíc, kam môžeme uložiť dva kamene – **7 spôsobov**: A4+B5, A3+C5, A2+D5, B1+E4, C1+E3, C2+D3 alebo D1+E2.

Keď chceme vložiť práve tri kamene. Prvý z nich musíme určite dať na os súmernosti (inak by nemohol mať svoj súmerný „pár") a pre zvyšné dva zopakujeme postup pre umiestnenie dvoch kameňov (okrem možnosti dať obidva kamene na os – tam už máme prvý kameň). To je, ako vieme, 7 možností. Keďže na osi máme dve voľné políčka, celý tento postup môžeme spraviť dvoma spôsobmi – raz s prvým kameňom na A5, druhýkrát s prvým kameňom na E1. Máme teda 2×7 = **14 možností**.

Os 2:

Teraz máme nesúmerné (na opačnej strane osi nemajú svoj „pár“) políčka A1, C4 a E5. Musíme teda doplniť kamene na všetky políčka, ktoré sú s nimi súmerné. Sú práve tri, čo vylučuje možnosť použitia 1 alebo 2 kameňov a ostáva nám **jediná možnosť**: tri kamene na A5+C2+E1.

Os 3:

V tomto prípade súmernosť narúšajú políčka B3 a C4, ktoré nemajú „pár“. Aby sme to napravili, doplníme kamene na políčka C2+D3. Tým sa vylučuje možnosť použiť iba jeden kameň. Táto možnosť je však rovnaká ako pri osi 1, a preto ju už druhýkrát nebudeme počítať. Ak by sme chceli použiť tri kamene, museli by sme tretí kameň položiť na os. Tam už však nie je miesto, a preto podľa tejto osi nemáme žiadnu inú možnosť.

Os 4:

Vidíme, že podľa tejto osi nemajú svoj „pár“ políčka A1, B3 a E5. Preto ak chceme, aby bol prívesok súmerný, musíme kamene vložiť na políčka s nimi súmerné: **jediná možnosť** E1+A5+D3. To je tiež dôvod, prečo nemôžeme použiť menej ako tri kamene na vytvorenie súmernosti podľa tejto osi.

Teraz už len spočítame všetky možnosti, ktoré sme našli a máme výsledok. 24+1+1 = 26. Prívesok sa teda dá doplniť ***26 spôsobmi***.

Bodovanie:

všetky správne umiestnenia kameňov – najviac 2,5b.; postup a zdôvodnenie, prečo sú kamene umiestnené tam, kde sú a prečo iné riešenia neexistujú – 2,5b.

Príklad S4: Tabletky. *Opravoval Peter „Comp“ Ambrož.*

Zadanie nám obmedzuje prvú a poslednú dvojicu číslic na nasledovné možnosti: 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91. To je 9 možností. Ich vzájomným skombinovaním dostaneme celkovo 9×9 = 81 možností, ako môže vyzerať číslo na tabletke, zatiaľ bez ohľadu na deliteľnosť siedmimi.

Teraz môžeme pokračovať tým, že si tých 81 možností napíšeme, každé jedno číslo skúsime vydeliť 7 a ak to ide bezo zvyšku, poznačíme si ho. Na konci tejto zdĺhavej a nudnej činnosti máme pred sebou 12 čísel, ktoré vyhovujú zadaniu: **1946**, **2828**, **2891**, **3773**, **4655**, **5537**, **6419**, **6482**, **7364**, **8246**, **9128**, **9191**. Takto to riešila väčšina z vás.

Dovolím si uviesť ešte jeden postup, pri ktorom sa za cenu trochu dlhšieho rozmýšľania zbavíme potreby deliť všetky čísla siedmimi. Trik spočíva v tom, že si uvedomíme, ako je to s tou deliteľnosťou. Vieme, čo je zvyšok po delení? Vieme. A vieme aj to, že keď číslo 1900 dáva po delení 7 zvyšok 3 a číslo 19 dáva zvyšok 5, potom číslo 1900 + 19 = 1919 dáva zvyšok 3+5 = 8, čiže 1 (1 preto, lebo zvyšok po delení 7 nemôže byť väčší ako 7, tak od 8 ešte jednu sedmičku odčítame; 8-7=1). Teda nie je deliteľné. Potrebujeme zistiť zvyšky po delení 7 pre čísla 1900, 2800, 3700, 4600, 5500, 6400, 7300, 8200, 9100 a tiež pre 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91. Tieto zvyšky si zapíšeme do tabuľky a pozeráme sa na ne, až dokým nám nezapne:

x	1900	2800	3700	4600	5500	6400	7300	8200	9100
zvyšok	**3**	**0**	**4**	**1**	**5**	**2**	**6**	**3**	**0**
y	19	28	37	46	55	64	73	82	91
zvyšok	**5**	**0**	**2**	**4**	**6**	**1**	**3**	**5**	**0**

Chceme nájsť všetky také možnosti čísel x+y, že súčet zvyškov bude 0 alebo 7. Vtedy je totiž výsledné číslo deliteľné 7. Možnosti pre hľadaný súčet zvyškov sú: 0+0, 1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1. Šikovní nájdu 12 možností a tým aj odpoveď na otázku zo zadania.

Bodovanie:

Pri skúšaní všetkých možností som na 5b. vyžadoval: ako vyzerajú všetky možnosti, nie nutne vypísať, iba ako by sme ich konštruovali – 9 možností pre jednotlivé dvojčíslia a počet všetkých možností (81); uviesť správny výsledok a aj to, aké sú hľadané čísla.

Menšia chyba – 4,5b. Za nekompletné postupy sa dalo stratiť aj viac bodov.

Tí, čo sa pustili inou cestou (všetka česť), to mali vo väčšine prípadov dôsledne spracované a teda dostali 5b.

Príklad S5: Krokodíl. *Opravoval Michal „Mišo“ Kováč.*

Keď si všimneme, ako fungujú jednotlivé meče, odhalíme zaujímavú skutočnosť.
Ak Menes zotne:

- 1 hlavu, narastie 148 nových. Celkový počet hláv sa *zvýši* o **147**.
- 2 hlavy, narastie 56 nových. Celkový počet hláv sa *zvýši* o **54**.
- 9 hláv, narastie 0 nových. Celkový počet hláv sa *zníži* o **9**.
- 11 hláv, narastie 14 nových. Celkový počet hláv sa *zvýši* o **3**.

Všetky zmeny počtu hláv sú deliteľné 3. Takže pri sekaní nemôžeme zmeniť zvyšok po delení tromi. Keď teda chceme na konci dostať 0 hláv, musíme začať s počtom hláv, ktorý je deliteľný 3. Inak sa nám to nepodarí. My však začíname zvyškom 1 (7:3 = 2, zvyšok 1). **Preto sa danými mečmi krokodíl poraziť nedá.**

Bodovanie:

Tí, čo nemali 5 bodov, buď spravili chybu v nejakom výpočte, alebo svoju odpoveď dostatočne nezdôvodnili.

Pikomat bol podporovaný Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy č. LPP-0375-09.

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

podporuje odborný rast organizátorov seminára