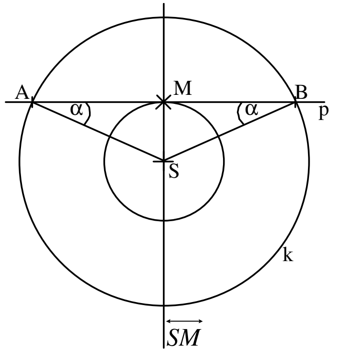
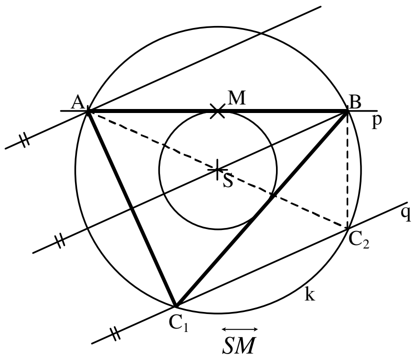
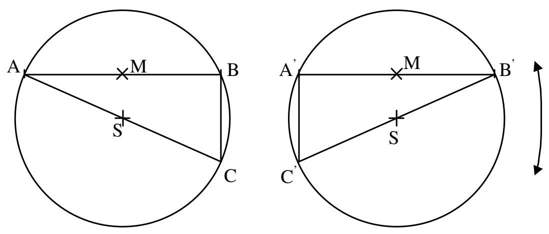
zdôvodniť. Iné zdôvodnenie: trojuholník je kružnici vpísaný a keďže vieme, že stred opísanej kružnice nájdeme ako osi strán trojuholníka, ktoré sú kolmé na strany, a zároveň ich rozpoľujú, máme ďalšie vysvetlenie. Môžeme vychádzať taktiež z podobnosti trojuholníkov podľa vety *sus* (obrázok 2). Takže body *A* a *B* už ležia na svojich miestach, ale kde hľadať bod *C*? K tomu nám pomôže ďalšia informácia zo zadania: ťažnica trojuholníka leží na priamke *BS*. To slovíčko priamka je veľmi dôležité, pretože väčšine z vás zobralo polovicu bodov. Čiže ťažnica bude úsečka pozostávajúca z bodu *B* a ešte nejakého bodu, ktorý sa nachádza na polpriamke *BS*. Pre ťažnicu platí, že rozdeľuje stranu trojuholníka na dve rovnaké časti, v našom prípade to bude strana *AC*. Čiže bod *C* bude rovnako ďaleko od polpriamky *BS* ako bod *A*. Urobme teda priamku rovnobežnú s polpriamkou *BC* a prechádzajúcu bodom *A*. Potom ju zobrazme osovou súmernosťou podľa polpriamky *BC*. Dostaneme priamku *q*, ktorej všetky body sú určite rovnako vzdialené od polpriamky *BC* ako bod *A*. Táto priamka sa pretne s kružnicou na dvoch miestach (obrázok 3). A to sú naše dve základné riešenia. Zaujímavé bolo, že ste sa rozdelili skoro na dve rovnaké polovice. Jedna našla jeden bod a tá druhá ten zvyšný. Ale ešte sme nevyhrali. Totiž ak vymeníme body *A* a *B*, dostaneme v podstate rovnaké trojuholníky, ale zrkadlovo (osovo) súmerné podľa priamky *BC*. Mnohí z vás ich považovali za TOTOŽNÉ, resp. ste pojmy totožné a zhodné považovali za to isté, čo NIE JE PRAVDA. Predstavte si, že máte na stole dve mince a na každej z nich jeden z našich pravouhlých trojuholníkov (ako to je na obrázku 4). Chcem to ukázať na pravouhlom trojuholníku kvôli názornosti. Platí to pravda aj pre ten rovnoramenný, ale tam to nie je tak pekne vidieť. Ak by boli naše trojuholníky úplne rovnaké – totožné, tak ak by sme začali jednou z mincí otáčať, po určitom čase by sme sa pozerali na dve úplne rovnaké mince. Ak si to skúsite, veľmi rýchlo prídete na to, že sa to nedá. Možno ešte lepšie by ste to videli, ak by ste si vystrihli z papiera kruhy a do nich nakreslili naše trojuholníky a tie kruhy potom dali na seba a pozerali sa cez ne proti svetlu (úplne stačí denné). Potom by ste začali jedným z nich otáčať a malo by to rovnaký výsledok. Asi by bolo vhodné ešte spojiť stredy kruhov, aby sa vám neposúvali.



Obrázok 2



Obrázok 3



Obrázok 4

Bodovanie*:* Za nájdenie jedného trojuholníka, či už pravouhlého alebo rovnoramenného bolo 2,2 bodu. Z toho postup bol od 0 po 0,6 bodu. Ak ste zistili, že vymenením bodov A a B dostaneme ďalšie dve riešenia získali ste ďalších 0,6 bodu. Ak ste nejakým spôsobom prišli na to, že zámenou bodov A a B vzniknú ďalšie riešenia, ale potom ste napísali, že tie trojuholníky budú rovnaké, a teda sa nepočítajú, dostali ste namiesto 0,6 bodu 0,2.

PIKOMAT ,22. ročník šk. rok 2004/2005

P-MAT n.o.
organizátor korešpondenčného seminára

NADÁCIA INGENIUM
podporuje odborný rast organizátorov seminára

Vzorové riešenia 2. série zimnej časti kategórie 7-9

Príklad S1: A trvá a trvá opravovala Janka Nutelka Michalíková

Táto úloha sa dala riešiť rôznymi spôsobmi, takže ja uvediem len jeden z nich, ale samozrejme aj ostatné sú správne, ak ste všetko poriadne odôvodnili a prišli k správnemu riešeniu. Budeme vychádzať z toho, že Hugo má na konci červenú čiapku, takže ju musel dostať od nejakého dievčaťa. Máme teda tri možnosti.

1. **Hugo dostal čiapku od Ani:**

Dušan by potom mal Hugovu čiapku. Teraz si zistíme, od koho mohla dostať čiapku Aňa. Musel to byť chlapec, lebo má na konci modrú čiapku. Zistím, že tam žiaden chlapec nesedí, pretože potom by nevyhovovali výroky Bei a Cecílie. Takže Hugo čiapku od Ani nemohol dostať.

2. **Hugo dostal čiapku od Bei:**

Podľa jej výroku vieme určiť, kde bude v našom reťazci Eňo. Opäť sa pozrieme na to, kto mohol dať čiapku Bei (ktorý chlapec). Zistíme, že to mohol byť jedine Dušan, takže už vieme doplniť aj Aňu. Takže máme zoradených piatich hostí a splnené tri výroky. Ostáva nám teda zistiť, či vieme zoradiť aj zvyšných troch. A odpoveď je áno, bude to vyzerať takto C-F-G-C-F. Takže sme našli jedno riešenie. Musíme ale skontrolovať aj poslednú možnosť, aby sme zistili, či úloha nemá viac riešení.

3. **Hugo dostal čiapku od Cecílie:**

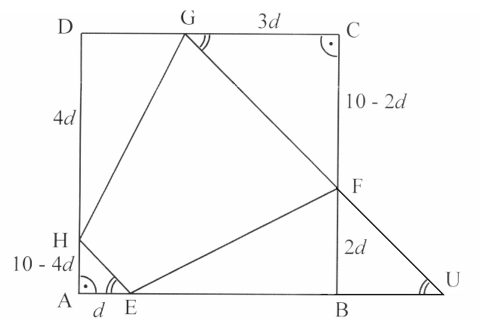
Podľa jej výroku vieme určiť, kde bude v našom reťazci Fero. Pozrieme sa, či tam dokážeme doplniť ďalších ľudí tak, aby boli splnené podmienky. Zistíme, že ani Aňu ani Beu tam už dať nemôžeme, pretože podľa ich výrokov tam musíme doplniť aj Dušana, resp. Eňa, ale tí nám tam už „nepasujú“. Z toho vyplýva, že úloha má len jedno riešenie.

Bodovanie: Za správny výsledok som dávala 2 body (1,5 za časť H-A-E-D-B-H a 0,5 za C-F-G-C-F), za postup ste mohli dostať 3 body. Ak ste úlohu riešili skúšaním, tak ste body dostali podľa toho, či ste tam našli nejaké podmienky, ktoré musia byť splnené, a teda si to skúšanie skrátili, a či ste dostatočne vysvetlili, ako ste skúšali a podľa čoho ste jednotlivé možnosti vylučovali.

Príklad S2*:* Poslednú mincu *opravoval Peter Pepe Kóša*

Označme si |AE| = d. Potom vieme, že |BF| = 2d, |CG| = 3d, |DH| = 4d, |EB| = 10 – d, |CF| = 10 – 2d, |GD| = 10 – 3d a |HA| = 10 – 4d. Teraz predpokladajme, že strany EH a GF sú rovnobežné. Potom sú trojuholníky AEH a CGF zhodné (podľa vety uu), lebo:

1) uhly AEH a BUF sú zhodné (HE || GF), zhodné sú aj uhly BUF a CGF (AB || CD ; BUF a CGF sú striedavé, a teda aj zhodné), a tým pádom aj uhly AEH a CGF.
2) Uhly DAB a BCD sú uhlami štvorca, preto sú oba pravé.



Podľa podobnosti trojuholníkov vieme, že pomery ich strán sú totožné, teda platí d / (10-4d) = 3d / (10-2d). Po úpravách dostávame d = 2 cm, čo nás teší, lebo už vieme narysovať 1 lichobežník.

Teraz ale uvažujme, že by boli základňami lichob. úsečky EF a GH. Preto by podľa podobnej úvahy museli byť zhodné trojuholníky

GDH a FBE, preto by muselo platiť 2d / (10-d) = 4d / (10-3d), z čoho po úpravách dostávame d = -10. Ako všetci dobre vieme, narysovať úsečku so zápornou dĺžkou nevieme,a preto toto riešenie nevyhovuje. Teda jediné správne riešenie je nami nájdený lichobežník pri |AE| = 2 cm.

Bodovanie: Za narysovanie útvaru, príp. za postup typu „skúšal som a vyšlo mi", ste mohli dostať 2-3,5 bodu a za správny postup, ale zabudnutú možnosť s EF ∥ GH 4,5bodu.

Príklad S3: Prácu šlachtí! *opravovalPeter Comp Ambrož*

Prvá vec, ktorú si treba uvedomiť je, že nemá zmysel triafať každé jedno políčko a dúfať, že najneskôr na 97. pokus zasiahnem loďku. Takisto nie je správne myslieť si, že loď sa dá zasiahnuť na 1. pokus. Ono to teoreticky ide, ale podstatné je nájsť taký počet striel, pre ktorý to <u>vždy</u> vyjde. Lodička zaberá 4 polia po sebe. Preto stačí, keď budem skúšať len každé štvrté políčko. Teda na výslednom obrázku budem značiť už zasiahnuté miesta, a medzi každými dvoma strelami nechám práve 3 voľné miesta (aby sa tam už nič nevošlo). Začnem vľavo hore. Prvé tri polia nechám voľné, štvrté zasiahnem. Ďalšie 3 voľné, 8. zasiahnem. Tým mám vybavený prvý riadok. Loďka môže byť aj zvislo, takže od umiestnených lodiek smerom nadol 4. políčko tiež trafím. Takýmto spôsobom rozmiestňujem strely až kým už nie je kde strieľať (vždy od nejakej predchádzajúcej strely triafam vľavo, vpravo a dolu o 4 políčka ďalej). Zistím, že som vystrelil 24-krát. Ešte musím zistiť, či je 24 naozaj najmenej, a to tak, že skúsim začať strieľať na iné políčko na začiatku. Rýchlo sa však ukáže, že mojich 24 je najmenej.

			x				x		
		x				x			
	x				x				x
x				x				x	
			x				x		
		x				x			
	x				x				x
x				x				x	
			x				x		
		x				x			

24 striel

		x				x			
	x				x				x
x				x				x	
			x				x		
		x				x			
	x				x				x
x				x				x	
			x				x		
		x				x			
	x				x				x

25 striel

	x				x				x
x				x				x	
			x				x		
		x				x			
	x				x				x
x				x				x	
			x				x		
		x				x			
	x				x				x
x				x				x	

26 striel

Bodovanie: 5 bodov za vysvetlenie toho, že medzi strelami treba nechať 3 voľné polia, za obrázok, kde sú zaznačené strely a ďalšie obrázky resp. popis, z ktorého vidno, že pri inom posunutí už vyjde 25 alebo 26 striel. Ak ste neukázali, že 24 je najmenej – 4.8 bodu. Tí, čo našli 25 alebo 26 strelové riešenie, majú 4.5 bodu. Ak bolo tých striel ešte viac (28, 32, 36), ale postup bol správny, majú 4 body. Ak ste neuviedli postup, odrátajte si 2.5 bodu. No a nakoniec riešenia typu „skúšam každé políčko" alebo „mám šťastie a trafím sa hneď" s vysvetlením, boli hodnotené za 1 bod.

Príklad S4: Štvorce a kruhy ... *opravovala Vlasta Krupla Gubášová*

Na úvod je pre niektorých riešiteľov potrebné vysvetliť, že Karol a Michal hrali hru, t.j. ťahali striedavo a jeden ťah spočíval vo vygumovaní 2 útvarov a pripísaní 1 útvaru podľa pravidiel. Počet útvarov sa teda po každom ťahu zmenšoval o 1 až kým neostal len jediný útvar! Pritom je nezvyčajné, že o výsledku tejto hry rozhoduje len počiatočná pozícia (do dôsledkov len počet kruhov) a hráči, ktorí dodržujú pravidlá tejto hry, nemôžu výsledok nijak ovplyvniť.

<u>Správna odpoveď:</u> Karol vyhrá (t.j. ako posledný útvar ostane štvorec) len a len vtedy, keď je počet kruhov na začiatku hry párny. Konkrétne pripadá do úvahy 26 pozícií a to sú všetky pozície v ktorých bolo na začiatku 0,2,4, ..., 46,48,50 kruhov.

<u>Zdôvodnenie:</u> Hra má tri „nahradzovacie" pravidlá – 1. *Vymeniť dva kruhy za jeden štvorec* alebo 2. *Vymeniť dva štvorce za jeden štvorec* alebo 3. *Vymeniť kruh a štvorec za kruh.* Podľa prvého pravidla sa zmení počet kruhov o 2 a podľa ostávajúcich dvoch pravidiel sa počet kruhov nezmení. Výsledkom pravidiel teda je, že sa nemení parita(párnosť-nepárnosť) počtu kruhov, ktoré ostávajú v hre. Ak bol počiatočný počet kruhov párny tak jediný útvar, ktorý na konci hry ostane, nemôže byť kruhom (zmenila by sa parita počtu kruhov ostávajúcich v hre) – teda musí byť štvorcom. A naopak – ak bol počiatočný počet kruhov nepárny, potom posledný útvar v hre musí byť kruhom (aby sa dodržala parita kruhov ostávajúcich v hre).

Veľmi zaujímavý bol náznak elegantného prevednia tejto hry na násobenie +1 a –1 . Ak miesto štvorcov napíšeme +1 a miesto kruhov –1 a vygumovanie dvoch útvarov bude znamenať ich vynásobenie a nahradenie novým útvarom bude znamenať zapísanie výsledku tohoto násobenia, potom celá hra je vlastne sformulovaná takto: „ Karol a Michal napísali na papier 50 kladných alebo záporných jednotiek (+1 alebo –1). Potom počítali súčin týchto 50-ich čísel tak, že striedavo každý z nich vybral ľubovoľné dve z napísaných jednotiek a nahradil ich ich súčinom. Karol vyhrá ak výsledok bude +1 a Michal ak výsledok bude –1. Aké mohli byť počty kladných a záporných jednotiek ak nakoniec vyhral Karol ?". Takúto úlohu by určite vedel vyriešiť každý z vás.

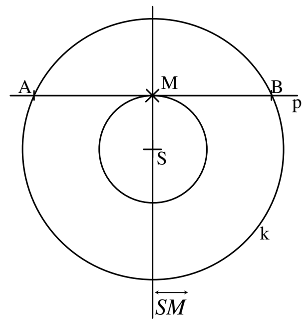
Bodovanie: Zvlášť bola bodovaná odpoveď a zvlášť bolo bodované zdôvodnenie. Ak teda niekto dostal 5 bodov, potom boli obe tieto zložky riešenia správne a ak niekto dostal menej bodov, potom niektorá z týchto dvoch zložiek bola neodstatočná.

Za správnu odpoveď boli 2 body. Za odpoveď v ktorej boli spomenuté len niektoré konkrétne situácie (napr. 24 kruhov a 26 štvorcov) bol 1 bod. Ak však odpoveď obsahovala aj viditeľne nesprávne možnosti bol výsledok 0 bodov.

Za správne a najmä dostatočne jasne formulované zdôvodnenie boli udelené 3 body. Ak bolo zdôvodnenie neúplné (napríklad bolo urobené len pre konkrétne pozície alebo len pre konkrétny spôsob postupu hráčov či inak „neuniverzálne") boli strhnuté body až po úroveň 0 bodov (chýbajúce zdôvodnenie, nesprávne zdôvodnenie, chaotické zdôvodnenie odvolávajúce sa na „vlastné skúsenosti z hry" a podobne).

V niektorých prípadoch boli udelené nejaké body (maximálne 2) aj za nejasnú či nesprávnu odpoveď a súčasne nejasné či nesprávne zdôvodnenie, ak z celkového riešenia bolo zrejmé, že riešiteľ pochopil podstatu problému, ale nedokázal ju čitateľne naformulovať.

Príklad S5: Šéfov znak *opravoval Peter Mitec Miťko*



Obrázok 1

Postupov bolo niekoľko, ale asi najkrajším a najlepším bol tento: V prvom rade si bolo treba uvedomiť, čo presne máme zadané. Vieme, že body A, B a C budú ležať na kružnici so stredom S a polomerom 6 cm. Bod M máme tak zvolený, že sa nachádza 2 cm od stredu S. Ak by sme si chceli vybrať akýkoľvek bod M, museli by sme hľadať na kružnici s polomerom 2 cm. Zatiaľ to je jasné. Ale teraz príde podmienka, ktorú ste síce mnohí narysovali správnym postupom, ale len veľmi malá časť z vás ju aj zdôvodnila. Bod M má ležať v strede medzi bodmi A a B. Ako to narysovať? A hlavne prečo to tak môžeme narysovať? Body A a B vzniknú prienikom priamky p a kružnice k, pričom priamka p je kolmá na priamku SM (obrázok 1). Zdôvodnení je niekoľko: úsečka AB je tetiva kružnice k a os každej tetivy je kolmá na tetivu a zároveň prechádza stredom kružnice. A keďže rozdeľuje tetivu zároveň na dve rovnaké časti, dalo sa to napríklad takto