Zoberieme ľubovoľný jeho kraj (svetielko susediace s vypnutým svetielkom) a nájdeme prvé zelené svetielko od tohoto kraja. Ak je toto svetielko hneď prvé, potom sa jeho vypnutím zmenší počet zelených svetielok o jedno a jeho pravý sused zmení farbu – ak bol červený, potom bude zelený (teda počet zelených svetielok vzrastie o jedno) a ak bol zelený, potom bude červený (teda počet zelených svetielok klesne o jedno) – teda celkovo sa zmení počet zelených svetielok o 0 alebo o 2 – teda ostane nepárny. Ak prvé zelené svetielko od kraja nebolo krajné, potom sa z jednej strany vedľa neho až po kraj nachádzajú len červené svetielka a z druhej strany sa nachádza párny počet zelených svetielok. Po jeho vypnutí sa teda na jednej strane (kde predtým boli len červené svetielka) premení jedno červené na zelené a z druhej strany sa zmení farba (ubudne alebo pribudne zelené svetielko). Vytvoria sa tak dva kratšie reťazce, z ktorých jeden bude obsahovať jediné zelené svetielko a druhý (ten čo obsahoval párny počet zelených svetielok) bude mať nepárny počet zelených svetielok. Zistili sme teda, že sme pôvodný reťazec s nepárnym počtom zelených svetielok rozdelili na dva menšie reťazce, z ktorých každý má takisto nepárny počet zelených svetielok. Môžeme skonštatovať, že vypínaním krajného zeleného svetielka v reťazcoch s nepárnym počtom zelených svetielok vždy dostaneme kratšie reťazce s nepárnym počtom zelených svetielok. Skracovaním sa teda dostaneme do situácie, že všetky reťazce budú mať jediné svetielko a kvôli dodržaniu parity musí byť zelené – teda vieme takéto reťazce úplne vypnúť. **Týmto sme dokázali, že ak pôvodný počet zelených svetielok (v kruhu) bol párny, potom počítač vieme zapnúť.**

Ostáva už len otázka – čo ak bol pôvodný počet svetielok nepárny ? Potom po stlačení prvého z nich vznikne reťazec, v ktorom je počet zelených svetielok párny.

Zoberme teraz ľubovoľné zelené svetielko v reťazci s párnym počtom zelených svetielok (ak také neexistuje, potom je to len reťazec s červenými svetielkami a ten sa nám nepodarí vypnúť !). Pred jeho stlačením musí na jednej strane od neho v reťazci ležať nepárny počet zelených svetielok (inak by celkový počet zelených svetielok v reťazci bol nepárny). Po stlačení tohoto svetielka však na tejto strane ostane párny počet zelených svetielok – pretože sused vypínaného svetielka zmení farbu a tým aj paritu tejto strany (taký sused musí existovať, pretože nepárny počet zelených svetielok zaručuje aspoň jedno zelené svetielko na tejto strane!). Týmto sme ukázali, že stlačením ľubovoľného zeleného svetielka v reťazci s párnym počtom zelených svetielok vytvoríme aspoň jeden kratší reťazec s párnym počtom zelených svetielok. Postupným skracovaním teda dostaneme reťazec s nulovým počtom zelených svetielok (avšak s nejakým červeným svetielkom, pretože najkratší reťazec, ktorý môže obsahovať aspoň jedno zelené svetielko musí mať dve rozsvietené svetielka – inak by tam nebol párny počet zelených svetielok).

Teraz už vieme veľmi presne odpovedať na otázku z pôvodnej úlohy (v ktorej je len osem svetielok a zelených je najviac tri): **Zelených svetielok musel byť kladný párny počet - teda dve (ostatné kladné párne čísla sú väčšie ako tri). Nezáleží pritom, ktoré dve svetielka z ôsmich rozsvietených boli zelené.**

Bodovanie*:* Za správnu odpoveď bol 1 bod. Za odpoveď, ktorá obsahovala aj nesprávne možnosti bolo 0 bodov okrem prípadov, kde bolo zrejmé, že riešiteľ len nesprávne zapísal výsledok (najčastejšie v podobe obrázku). Za odôvodnenie boli udelené body od 0 do 4 podľa toho, nakoľko bolo toto odôvodnenie úplné. 4 body za odôvodnenie dostali aj tí, ktorí síce neuviedli „dokonale“ úplné odôvodnenie, ale úroveň ich argumentácie jasne ukazovala, že to bola len otázka veľkého rozsahu ich riešenia.

PIKOMAT ,**22. ročník** **šk. rok 2004/2005**

organizátor korešpondenčného seminára — P-MAT n.o.

NADÁCIA INGENIUM podporuje odborný rast organizátorov seminára

Vzorové riešenia 3. série zimnej časti kategórie 7-9

Príklad S1: ***Číslo garáže*** *opravoval Peter Comp Ambrož*

Príklad sa dá riešiť aj od konca. Ak vydelím číslo *A* číslom *B,* a dostanem nejaké číslo *C*, potom keď vynásobím *CxB,* dostanem *A*. Začnem si skúšať „tretiny“ ciferných súčtov násobiť ciferným súčtom. (Teda ich trojnásobkom). Začnem skúšať pri čísle 1. Skúsim 1x3 = 3. To nie je dvojciferné číslo. Idem ďalej. Zoberiem 2. Skúsim 2x6 = 12. To už je dvojciferné, ale ciferný súčet je 1+2 = 3. To mi nesedí, lebo som predpokladal, že je 6. Ďalej skúsim 3x9 = 27 a tu nájdem prvé riešenie. 2+7 = 9, ciferný súčet sedí. Pozor, treba pokračovať v hľadaní ďalej, nestačí nájsť jedno riešenie, ako ste to mnohí robili. Takto zistím, že aj 48 je riešením (4x12=48; 4+8=12). Dokedy budem takto skúšať? Odpoveď je jednoduchá, stačí do 5, pretože už 6x18 = 108, a to nie je dvojciferné číslo. Mimochodom, číslo 5 nesedí.

Bodovanie: Za správne výsledky sa dalo získať pol bodu za každý (teda dokopy 1 bod). Zvyšné 4 za kompletný postup vedúci ku obom riešeniam. Pritom, ak ste našli len jedno z riešení, hoci pokračovaním vo vypisovaní by ste našli aj druhé, takýto postup som hodnotil za 3 body. Tie menej kvalitné boli za 2. Pri jednom riešení ste tak mohli získať 2,5 až 3,5 bodu.

Príklad S2: V bare *opravoval Michal Kesy Kesely*

Tento príklad sa v zásade dal riešiť dvomi podobnými spôsobmi.

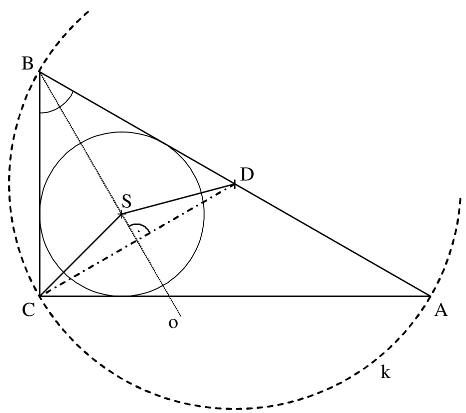
Spôsob prvý: Keďže v bare je 40 ľudí, ako prvé nám príde na um, že počet priateľov pre toho ktorého človeka môže byť v rozmedzí 0 až 39. Veď to je super, máme 40 ľudí a 40 možností priateľstiev. Až také jednoduché to zase nie je, pretože možnosti 0 a 39 sa navzájom vylučujú, prečo, to ľahko odhalíte aj sami, teda máme iba 39 možností priateľstiev a až 40 ľudí. No a teda musia existovať dvaja ľudia s rovnakým počtom priateľov. Tým je tvrdenie zo zadania dokázané. Toto sa v matematike nazýva Dirichletov princíp. Predstavte si, že máte n obálok a n+1 príkladov s riešeniami, tak v aspoň jednej obálke sú aspoň dva príklady. Samozrejmé, nie? V našom prípade sú priateľstvá obálky a priatelia príklady, preto existuje obálka (počet priateľov), v ktorej sú aspoň dva príklady (ľudia).

Spôsob druhý: Predpokladajme, že tvrdenie zo zadania neplatí, teda že neexistujú takí dvaja ľudia, ktorí majú rovnaký počet priateľov. Ten je v rozmedzí 0 až 39 pre 40 ľudí, preto každý človek musí mať priradený práve jeden z týchto počtov. Teda niekto má počet priateľov 0, čiže nemá priateľov, ale na druhej strane niekto sa priatelí so všetkými 39 ostatnými ľuďmi, teda aj s tým, čo priateľov nemá. To je ale spor so zadaním, lebo priateľstvá sú obojstranné a tu zjavne nie. Teda keďže neplatí to, čo sme predpokladali, musí platiť presný opak. No a to je, že aspoň dvaja ľudia majú rovnaký počet priateľov.

Bodovanie: Ak ste sa vydali jedným z týchto dvoch spôsobov, takmer určite máte 5 bodov. Ak ste ju chceli vyriešiť inak a chýbalo vám nejaké spojivo medzi niektorými krokmi, máte 4,7 bodu. Tí, čo úlohu riešili rozoberaním konkrétnych možností, dostali body podľa množstva ich rozobratia a podobnosti so všeobecným riešením, ale maximálne ste v tomto prípade mohli dostať 2,5 bodu.

Príklad S3: ***Tajnú skrýšu*** *opravoval Peter Mitec Miťko*

Na to, aby sme vedeli rozhodnúť, či sa má Jana vydať po úseku *SC* alebo *SD*, sme vôbec nepotrebovali poznať veľkosti strán trojuholníka, ba dokonca ani veľkosti samotných úsečiek *SC* a *SD*. Rozhodnúť sa dalo pomocou niekoľkých geometrických úvah, ale taktiež aj matematickým vyjadrením si veľkostí potrebných úsečiek.



Geometrický dôkaz:

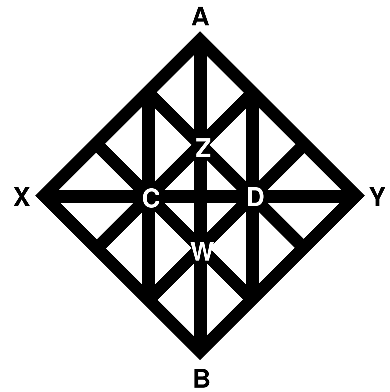
Každý trojuholník sa dá vpísať do kružnice. Pravouhlé trojuholníky sú z tohto hľadiska zaujímavé tým, že stred trojuholníka opísanej kružnice sa nachádza práve v strede prepony, čo je v našom prípade bod *D*. Potom ale jej polomermi nie sú len úsečky *DA* a *DB*, ale aj úsečka *DC*. Čiže trojuholník *CDB* bude určite rovnoramenný. Ak bol uhol pri vrchole A 30°, tak si už hravo vypočítate, že uhol pri vrchole *B* bude 60°. Potom ale aj uhol *BCD* musí mať 60°. Keďže súčet všetkých vnútorných uhlov v trojuholníku je 180°, trojuholník *CDB* musí byť rovnostranný, a teda $|BC| = |BD|$. Stred trojuholníka vpísanej kružnice leží na prieniku osí uhlov, ale zároveň aj na ťažnici trojuholníka *CDB* z bodu *B*, resp. jeho výške na stranu *CD*, či os strany *CD*, pretože v rovnostrannom trojuholníku sú všetky tieto úsečky totožné pre jednotlivé uhly. Tiež to platí aj v rovnoramennom trojuholníku, ale už nie pre všetky uhly. Viete, pre ktoré áno a pre ktoré nie? Zistili sme teda, že bod *S* leží na osi strany *CD*. Ale to už vlastne vieme jednoznačne povedať, ktorá z úsečiek *SC* alebo *SD* je väčšia. Os strany je totiž zároveň osou symetrie trojuholníka, a preto všetky body, ktoré sa na tejto osi nachádzajú, sú určite rovnako vzdialené od koncových bodov strany, na ktorú je os spravená. Jana sa teda chvíľu zdrží. Musí hľadať aj na úseku *SC* a aj na úseku *SD*.

Dalo sa na to ísť pravda aj inak. Mohli ste si napríklad dokresliť trojuholník *ABC* do obdĺžnika a z toho, čo v ňom platí pre uhlopriečky dospieť k záveru: $|BC| = |BD|$.

Taktiež ste si mohli vyjadrovať veľkosti uhlov a potom využitím viet o podobnosti trojuholníkov dospieť k výsledku, že $|SC| = |SD|$.

Bodovanie: Za správnu odpoveď bolo 0,5 bodu. Ak ste úsečky *SD* a *SC* odmerali a na základe toho zistili, ktorá z nich je dlhšia, resp. sú rovnako dlhé, dostali ste 1,5 b, pretože aj to je postup, ako dospieť k výsledku, aj keď v tomto prípade nie veľmi spoľahlivý. Spolu ste teda touto metódou mohli získať 2 body, v niektorých prípadoch 2,5 bodu. Inak bol postup hodnotený od 0 po 4,5 b a strhával som body, ak ste niečo podstatné v postupe nezdôvodnili alebo vynechali.

Príklad S4: ***Medzi regálmi*** *opravoval Peter Pepe Kóša*



Najprv si všimneme, že je treba osvietiť obvod miestnosti, pričom máme len 2 možnosti, ako to urobiť 2 lampami (jednou to nespravíme a 3 sú zbytočné, lebo potom by sme jednou neosvietili zvyšok). Pri prvej možnosti, keď je lampa vo vrchnom a v spodnom rohu miestnosti (A, B) musíme zostávajúce lampy umiestniť do bodov C, D, lebo chodby AY, ZD, CW, XB sú rovnobežné a teda v každej musí byť 1 lampa, aby boli všetky osvetlené. Rovnako AX, ZC, DW, YB sú rovnobežné a preto platí to isté. Potom skontrolujeme, či sú všetky miesta osvetlené – a sú. Hurá. Pri druhej možnosti, teda ak sú obvodové lampy v X a Y nám podľa úvahy hore vyjde rozloženie XWYZ. Ibaže kontrolou zistíme, že zvislé chodby prechádzajúce bodmi C a D nie sú úplne osvetlené, preto toto riešenie nevyhovuje.

Bodovanie: Za nájdenie viacerých riešení ako 1 ste stratili 1 bod za každé navyše.

Poznámka: Riešenia ako "Je tam vysoký strop a nízke regály, a preto dám 1 lampu do stredu stropu a teda je ju vidieť zo všadiaľ. " boli hodnotené 2,5 bodmi, lebo zadanie mohlo byť pochopené aj týmto spôsobom.

Príklad S5: ***Zapni palubný počítač!*** *opravovala Vlasta Krupla Gubášová*

Úlohu si vyriešime všeobecne pre N > 2 a na ňom ľahšie pochopíte ako sa rieši úloha pre 8 svetielok. Ukážeme, že sa počítač dá naštartovať, len ak je počet zelených svetielok kladný párny (teda väčší ako 0), a od ich polohy to nezávisí.

<u>Najprv ukážeme, že prvým ťahom sa zmení parita počtu zelených svetielok.</u> Parita znamená, či je počet párny, alebo nepárny. Keďže svetielka sú usporiadané do kruhu, určite každé zelené svetielko má dvoch susedov, ktorí sú rozsvietení. Vyberieme si hociktoré zelené svetielko a stlačíme ho. Jeho susedia pred stlačením mohli byť rozsvietení len niektorým z nasledujúcich spôsobov: ČZČ, ČZZ, ZZČ, ZZZ (Č – červené, Z – zelené) (keďže N > 2, tak muselo mať dvoch rôznych susedov). Po stlačení sa ich farby zmenili nasledujúcim spôsobom: ZVZ, ZVČ,ČVZ, ČVČ (V- vypnuté). Ak teda spočítame počet zelených svetielok v týchto trojiciach pred stlačením, dostaneme 1,2,2,3 a po stlačení dostaneme 2,1,1,0 – čiže vždy sa zmení parita. Keďže stlačením uvažovaného zeleného svetielka došlo k zmene farby len u vyššie spomenutých troch svetielok, nebol zmenený počet prípadných ostatných zelených svetielok v celom kruhu. Vidíme teda, že parita počtu zelených svetielok sa zmenila v celom kruhu.

Teraz ukážeme, že ak po stlačení prvého zeleného svetielka ostane svietiť nepárny počet zelených svetielok, potom vždy nájdeme postup ako všetky svetielka vypnúť. Najprv si musíme ujasniť, že po stlačení prvého zeleného svetielka sa kruh rozpadne a ostane len reťazec svetielok a po ľubovoľnom počte nasledujúcich stlačení stále budú rozsvietené len prerušované reťazce svetielok. Každý takýto reťazec je ohraničený vypnutými svetielkami. Takže ideme vypínať ľubovoľný z takýchto reťazcov, ktorý obsahuje aspoň dve svetielka (Pre jedno svetielko je to jednoduché – pretože toto svetielko musí byť zelené (parita !!!) a jeho stlačením vypneme celý reťazec).