PIKOMAT

Vzorové riešenia 3. série letnej časti, kategória 7-9

Príklad S1: Losovanie. *Opravoval Peter „Comp“ Ambrož.*

S tvrdeniami sa najľahšie vysporiadame tak, že si rozoberieme situácie, ktoré môžu nastať. Prvé dve obálky svojimi tvrdeniami nie sú veľmi zaujímavé. Zato tá tretia hovorí: „Maximálne jedno z týchto troch tvrdení je pravdivé.“ Možnosti sú len dve. Buď je tvrdenie na 3. obálke pravdivé, alebo nie je.

Ak je pravdivé, znamená to, že už máme jedno pravdivé tvrdenie (na 3. obálke), a teda zvyšné dve sú klamstvá. Tým pádom v prvej obálke je výprava, hoci sa píše, že hliadka. V druhej obálke je hliadka, hoci sa píše, že výprava. Takže v tretej obálke musí byť zvyšná výprava.

Tvrdenie na 3. obálke však môže byť aj nepravdivé. Vtedy sa dá interpretovať ako: „Aspoň dve tvrdenia sú pravdivé.“ To je totiž presný opak toho, čo sa tam píše. Keďže tvrdenie na 3. obálke považujeme za nepravdivé, prvé dve tvrdenia sú pravdivé, lebo aspoň dve musia byť pravdivé. V praxi to znamená, že v prvej obálke je hliadka (ako je na nej napísane) a v druhej obálke je výprava (ako je na nej napísané). V tretej obálke je tým pádom zvyšná výprava. Zhrňme si možné situácie prehľadnejšie:

3. obálka hovorí pravdu: **V H V**
3. obálka klame: **H V V**

Teraz už Ingrid vie, že za každých okolností si má vybrať **obálku číslo 3**, lebo v nej je naisto výprava.

Bodovanie:
logická úvaha so záverom, že 3. obálka je vždy tá správna – 5b.; urputné uvažovanie bez výsledku alebo s chybami – do 3b.; ostatné strhnutia bodov sú odôvodnené priamo v riešení.

Príklad S2: Vážime krokodíla. *Opravoval Pavol „Tamarka“ Hronský.*

Na začiatok je dôležité si uvedomiť, že keď vážime nejakú vec na rovnoramenných váhach, neznamená to, že musíme položiť tú vec na jednu stranu a závažia na druhú.

Ako východiskový bod použijeme závažie s hmotnosťou 1, lebo je zbytočné vyvažovať hmotnosť 1 pomocou viacerých závaží. Keďže naša snaha je odvážiť čo najťažšieho krokodíla, budeme sa snažiť pridávať čo najťažšie závažia. Preto rovno vylúčime možnosť, že by sme mali z nejakého typu viac kusov.

Máme teda závažie s hmotnosťou 1 a ideme vážiť ďalej. Ako odvážiť hmotnosť 2? Zobrať závažie s hmotnosťou 2 je nepraktické, keďže sa snažíme použiť čo najťažšie závažia. Preto vezmeme závažie s hmotnosťou 3. Pomocou 1 a 3 vieme vyvážiť krokodíla s hmotnosťou 2 tak, že ku krokodílovi pridáme závažie 1 a na druhú stranu váh položíme závažie 3 (takéto „pomáhanie si“ pri vážení je v tomto príklade veľmi často využívané). S týmito dvomi závažiami potom dokonca nemáme problém odvážiť hmotnosti 3 a 4.

A teraz úvaha: pomocou závaží 1 a 3 dokážeme vyvážiť hmotnosti od 1 po 4. To znamená, že vieme naše závažia na váhach usporiadať tak, aby sa správali ako jedno závažie s hmotnosťou 1, 2, 3 alebo 4. Príklad: keď dáme na ľavú misku závažie 1 a na pravú misku závažie 3, je to úplne to isté, ako keby sme na pravej miske mali jedno závažie 2 (aj keď také nemáme). Môžeme teda ďalej rozmýšľať tak, akoby sme mali k dispozícii závažie 1, 2, 3 alebo 4 – pretože ak také aj nemáme, môžeme si ho „vyrobiť“.

Tým pádom keď chceme odvážiť krokodíla s hmotnosťou 5 (musíme už zobrať tretie závažie), tak tretie závažie môže mať hmotnosť až 5+4=9. Odvážime ho tak, že k nemu na misku pridáme „vyrobené“ závažie 4 a na druhú misku dáme nové závažie 9. Toto isté potom môžeme spraviť aj pre krokodíla s hmotnosťou 6, 7 alebo 8 („vyrobíme“ si závažia 3, 2 alebo 1). Podobne to bude fungovať aj pre krokodíla ťažšieho ako 9, iba budeme „vyrobené“ závažia 1 až 4 pridávať k závažiu 9.

Máme teda 3 závažia, pomocou ktorých dokážeme vyvážiť všetky hmotnosti od 1 až po 13. Opäť to znamená, že si z nich môžeme „vyrobiť“ akékoľvek závažie od 1 po 13. Preto pre štvrté závažie, ktoré ešte máme k dispozícii, zvolíme hmotnosť 13+14=27. Podľa toho, kam budeme ukladať „vyrobené“ závažia 1 až 13, vieme spolu so 4. závažím vyvážiť hmotnosti od 27-13 = 14 až po 27+13 = 40. Výsledné závažia majú hmotnosti **1, 3, 9 a 27**.

Poznámka:
Vedel/-a by si povedať, aké by mal príklad riešenie (pri rovnakom zadaní), keby sme mali k dispozícii 5 alebo dokonca ešte viac závaží? *Riešenie nájdeš na poslednej strane za posledným príkladom.*

Bodovanie:
vysvetlenie postupu a overenie výsledku – 2b.; výsledné závažia – 0 až 3b.

Príklad S3: Magické číslo. *Opravovala Mária „Marry“ Šormanová.*

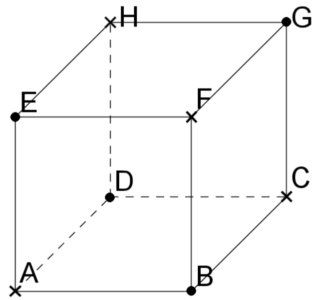
Magické číslo je také číslo, ktorého každé dve po sebe idúce cifry sú druhou mocninou. Chceme nájsť najväčšie párne a najväčšie nepárne magické číslo. V prvom rade si potrebujeme vypísať dvojciferné druhé mocniny prirodzených čísel. Sú to 16, 25, 36, 49, 64, 81.

NEPÁRNE magické číslo: musí končiť nepárnou cifrou. Z mocnín, ktoré sme si vypísali, nepárnou cifrou končia 25, 49 a 81. Keď dáme na koniec magického čísla 81, nemáme už pred túto mocninu čo „nadpojiť“, pretože žiadna z mocnín nekončí osmičkou. Z rovnakého dôvodu sa neoplatí použiť ani 25. Na koniec magického čísla nám ostáva už iba 49. Teraz budeme postupne pred 49 nadpájať mocniny, pokým to bude možné. Štvorkou končí jedine 64, preto nadpojíme 64. Máme číslo 649. Šestkou končia 36 a 16. Keďže pred trojku by sme už nemohli nič nadpojiť, je výhodnejšie použiť 16. Máme číslo 1649. Jednotkou končí jedine 81, preto nadpojíme 81. Máme číslo 81649. Pred osmičku už nemáme čo nadpojiť. **Najväčším nepárnym magickým číslom je 81649**.

PÁRNE magické číslo: musí končiť párnou cifrou a tým pádom 16, 36 alebo 64. Pred 36 nie je čo nadpojiť. Mocniny 16 a 64 sa obe nachádzajú v našom najväčšom nepárnom magickom čísle, z ktorého vidíme, že od 64 ide dlhší rad cifier ako od 16 (8164 a 816). Preto **najväčším párnym magickým číslom je 8164**.

Bodovanie:
výsledky boli zväčša správne, body som strhávala za nesprávne úvahy a nedostatočné vysvetlenia.

Príklad S4: Skarabeus. *Opravoval Michal „Mickey" Kopf.*



Rozdeľme si vrcholy kocky do dvoch skupín. Prvá skupina: A, C, F, H (označené krížikom); druhá skupina: B, D, E, G (označené bodkou). Všimnime si, že skupiny sú zvolené tak, že skarabeus pri každom presune určite musí prejsť z jednej skupiny do druhej. Teraz ideme hádať spolu s Guineverou.

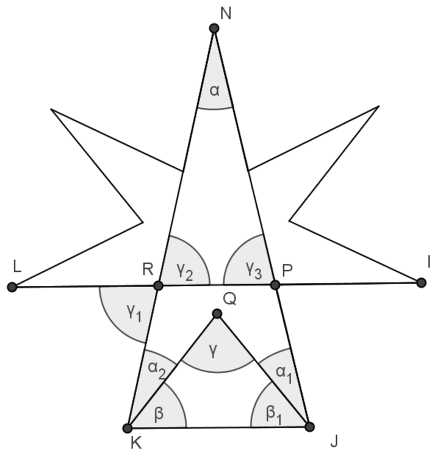
V prvých dvoch kolách zistíme, v ktorej z týchto dvoch skupín vrcholov sa skarabeus nachádza. Predpokladajme, že na začiatku je niekde v prvej skupine (ACFH). Guinevera preto háda ľubovoľné tri vrcholy z prvej skupiny (napríklad ACF). Ak pri tom skarabea nenájde, musel sa nachádzať na zvyšnom štvrtom vrchole (v tomto prípade H). Odtiaľ sa môže presunúť iba na tri vrcholy (z H sú to EDG). Presne tie tri vrcholy si Guinevera overí v druhom kole hádania. Ak bol predpoklad správny a skarabeus začínal niekde v prvej skupine, určite sme ho našli.

Ak bol náš predpoklad nesprávny, aspoň vieme, že skarabeus začínal niekde v druhej skupine. Z toho tiež vieme, že po dvoch presunutiach (pred tretím hádaním) musí byť zase v druhej skupine. Guinevere tým pádom stačí zopakovať postup z prvých dvoch kôl, pretože teraz už naisto vie, v ktorej skupine sa skarabeus nachádza. Takže v treťom kole vyberie tri vrcholy z druhej skupiny (napríklad BEG) a ak neuhádne, skarabeus musí byť na tom zvyšnom štvrtom vrchole (v tomto prípade D). Odtiaľ sa môže presunúť iba na tri vrcholy (z D sú to ACH), ktoré Guinevera háda vo štvrtom kole. Tým má zaistené, že skarabea vždy nájde.

Takže jedno z riešení je **napríklad: ACF, EDG, BEG a ACH**.

Bodovanie:
správne riešenie – 3b.; popis – 2b.; iba dobrá myšlienka či nápad – okolo 2,5b.

Príklad S5: Vetrací otvor. *Opravoval Martin „Panda“ Svetlík.*



V prvom rade vás musím pochváliť, úlohu ste skoro všetci zvládli a skoro každý z vás mal iný postup. Väčšina z týchto postupov využívala veľkosť uhla v pravidelnom sedemuholníku, ktorý niekde vznikol po dokreslení niektorých úsečiek. Tu si preto ukážeme úplne iný postup – bez rátania uhla pravidelného sedemuholníka.

Keďže hviezda je pravidelná, všetky uhly pri cípoch majú rovnakú veľkosť (α) a všetky vonkajšie uhly medzi stranami susedných cípov hviezdy majú rovnakú veľkosť (γ).

Keďže niektoré dvojice strán ležia na jednej priamke, môžeme si ich spojiť do jednej úsečky. Teraz sa pozrime na trojuholník KJQ. Je rovnoramenný (dve z jeho strán sú strany našej pravidelnej hviezdy), a tak platí, že **2β + γ =180°**. V trojuholníku KJN majú spodné dva uhly veľkosť (α+β), tretí má veľkosť α, a tak platí, že 2·(α+β) + α = 180°, čo upravíme na **2β + 3α = 180°**. Spojením týchto dvoch hrubo vyznačených rovníc dostaneme, že 2β + γ = 2β + 3α, takže **γ = 3α**.

Pozrime sa teraz na trojuholník RPN. Dva jeho uhly sú vrcholové s uhlami γ, a teda majú tiež veľkosť γ, tretí je náš hľadaný uhol α. Takže platí, že **2γ + α = 180°**. Keď do tohto za γ dosadíme γ = 3α, tak dostaneme 2·3α + α = 180°, čo upravíme na **7α = 180°**. Hľadaný uhol α má tým pádom veľkosť

$$\alpha = \frac{180°}{7} \cong 25{,}71° \cong 25°42'51''\cdot$$

Poznámka:

ponúkam vám ešte jeden spôsob riešenia, keďže je však náročný na predstavivosť, alebo by vyžadoval veľa obrázkov, môžete si ho pozrieť na *www.pikomat.sk* ako video.

Bodovanie:

keďže mnohí z vás mali správny výsledok, bol som trochu prísnejší pri hodnotení vášho zdôvodnenia a vysvetlenia.

Dodatok k S2: každé ďalšie závažie je trojnásobkom predošlého: 1, 3, 9, 27, 81, 243, ...

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

AGENTÚRA NA PODPORU VÝSKUMU A VÝVOJA

Pikomat bol podporovaný Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy č. LPP-0375-09

NADÁCIA INGENIUM

podporuje odborný rast organizátorov seminára