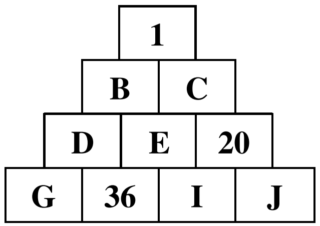
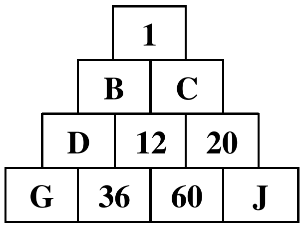
Príklad S6: Vikinu pyramídu *opravoval Matej Bendži Bendžala*

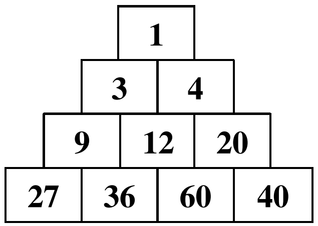
Spôsobov riešenia tejto úlohy je viacero, je možné začať z rôznych častí pyramídy a potom sa dopracovať k riešeniu zložitejšou alebo jednoduchšou cestou. Jeden zo spôsobov riešenia je:
Najprv si označím tehličky v pyramíde písmenami A až J(obrázok 1):
Začnem napríklad tehličkou označenou I. Keďže 20 je najväčší spoločný deliteľ čísel I a J je 20 (najväčší spoločný deliteľ čísel x, y budem zapisovať ako NSD(x,y)), musí byť číslo I násobkom 20. Číslo 20 použiť nemôžme, lebo už je použité, takže číslo I bude 20, 40, 60, 80 alebo iný násobok 20. To isté platí o J.
Teraz skúsme zistiť aké bude číslo E. Je to deliteľ čísla 36 a 36=2.2.3.3, keď vieme, že E nemôže byť 1 a 36 ostávajú možné čísla: 2,4,6,12,18. Ak by **E=2**, C=NSD(2,20) je tiež 2 a opakovala by sa dvojka, teda E nie je 2; ak **E=4**, C=NSD(4,20) je 4 a znova by sa opakovalo číslo, teda E nie je 4. Ostávajú možnosti 6, 12, 18.
Ak **E=6**, potom číslo I je násobkom 6 a 20. 6=2.3 a 20=2.2.5, teda násobok 6 a 20 I=2.2.3.5.k (k je nejaké celé číslo), teda I=12.5.k a vieme, že 36 je deliteľné 12 a teda NSD(36,I) nemôže byť 6, lebo obe čísla delí väčšie číslo 12, teda E nemôže byť 6.
Ak **E=12**, potom číslo I je násobkom 12 a 20. Teda I=2.2.3.5.k=60.k, sú to teda čísla 60,120,180,240, 300, 360, 420,... Každé tretie číslo v tejto postupnosti však je deliteľné aj 18 a aj 36, a potom by NSD(36,I) bolo 36 a nie 12, teda tieto čísla vylúčime. Ostávajú čísla: 60, 120, 240, 300, 420, ..., pre ktoré je E vždy 12 a keďže hľadáme najmenšie čísla do pyramídy, vyberieme najmenšie I=60. Akýkoľvek výber neovplyvní ostatné čísla, takže možno tak urobiť. (obrázok 2)
Treba overiť aj možnosť **E=18**, čo ak potom bude súčet čísel menší, aj keď sa to zdá nepravdepodobné. Číslo I je násobok 18 a 20, teda I=2.2.3.3.5.k, teda I=180.k=36.5.k, je teda deliteľné 36 a NSD(36,I) bude 36 a nie 18, táto možnosť teda nevyhovuje. Pokračujem teda v jedinej vyhovujúcej možnosti pre E: číslo C ľahko vypočítame ako NSD(12,20)=4. Číslo B je deliteľ 12, rôzny od 12, 1 a 4, ktoré sme už použili, teda ostáva 2, 3 a 6. 2 a 6 môžeme vylúčiť, lebo NSD(2,4) a NSD(6,4) je 2 a nie 1 ako je v najvrchnejšej tehličke. Ostala jediná možnosť B=3. Číslo D je násobok 3 a deliteľ 36, také čísla sú: 3, 6, 9, 12, 18, 36, keď vylúčime už použité ostáva: 6, 9, 18. 6 a 18 nevyhovuje podmienke, že B musí byť 3, lebo NSD(12,6) a NSD(12,18) je 6 a nie 3, teda ostalo len 9, ktoré túto podmienku spĺňa. D=9. Číslo G je násobok 9, čiže môže byť 18, 27, 36, 45,... , ale s číslo 36 musí mať NSD 9 a to nespĺňajú čísla 18 a 36 a ich násobky, ostávajú teda možnosti: 27, 45, 63, 81, ... Pričom nech si vyberieme ktorúkoľvek v ostatných tehličkách sa nič nezmení, preto aby bol súčet čísel v tehličkách minimálny, vyberieme si to najmenšie číslo G=27. Ostáva ešte číslo J, ktoré má byť násobok 20 a jeho NSD s 60 má byť 20, najmenšie také číslo je J=40. (obrázok 3).
Pyramída je vyplnená a môžeme povedať, že súčet čísel v nej doplnených je najmenší možný, lebo väčšinou bola len jedna možnosť aké číslo doplniť podľa zadania a kde nie, tam sme z množiny vyhovujúcich čísel vybrali najmenšie, pričom akýkoľvek výber čísla z tejto množiny nemohol ovplyvniť ostatné čísla v pyramíde.
Bodovanie: Za výsledok bez postupu – 1 bod, ak je zle výsledok a postup dobre – 4 body. Body som strhával aj keď je výsledok dobre, ale nebolo uvažované o niektorej z možností –1,5 bodu, prípadne viac, ak nebolo uvažované o viacerých. Ak pyramída nespĺňala hlavnú podmienku o deliteľnosti, tak bolo –2 až –4 body.



obrázok 1



obrázok 2



obrázok 3

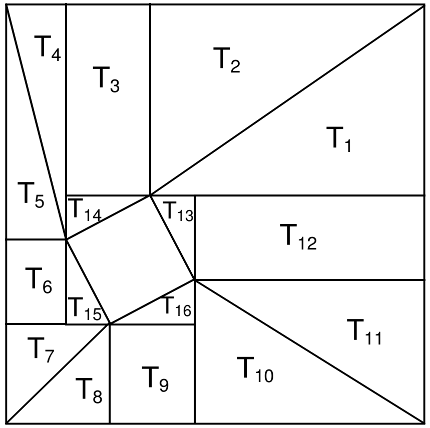
PIKOMAT ,21. ročník šk. rok 2003/2004

organizátor korešpondenčného seminára

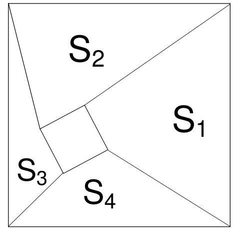
podporuje odborný rast organizátorov seminára

Vzorové riešenia 2. série zimnej časti kategórie 7-9

Príklad S1: Rámik obrazu *opravoval Peter Fajler Fillo*



Bolo treba dokázať, že S1 + S3= S2 + S4 (obrázok je vpravo) Obrázok si rozdelím tak, že z každého vrcholu malého štvorca spustím dve kolmice. Tak, ako je to na obrázku vľavo.



Ako je na obrázku vidno, tak tam vznikli štyri obdĺžniky s uhlopriečkou. Daná uhlopriečka každý obdĺžnik rozdeľuje na dva rovnaké trojuholníky. Sú to: T1 = T2; T4 = T5; T7 = T8; T10 = T11; Ďalej mi na obrázku ostali štyri obdĺžniky bez uhlopriečky: T3, T6, T9, T12 a štyri trojuholníky hneď vedľa malého štvorca: T13, T14, T15, T16. Trojuholníky sú rovnaké, pretože každý z nich sa skladá z tých istých troch rôznych strán. Tieto štyri trojuholníky spolu s malým štvorcom vytvárajú väčší štvorec (ktorého stranu si označím x), ktorého strany sú rovnobežné s rámikom (veľkým štvorcom). |T9| - znamená výška plochy T9. A ďalej platí: |T3| + |T9| + x = dĺžka strany rámika (veľkého štvorca). Takisto platí: |T6| + |T12| + x = dĺžka strany rámika (veľkého štvorca). A z tohoto dostanem, že T3 + T9 = T6 + T12. Teraz to všetko dosadím do začiatočného vzorca: S1 + S3 = S2 + S4 a bude to S1 + S3 = (T1 + T12 + T11 + T13) + (T5 + T6 + T7 + T15) = T1 + T11 + T5 + T7 + (T6 + T12) + T13 + T15 = (každý z týchto členov nahradím iným) = T2 + T10 + T4 + T8 + (T3 + T9) + T14 + T16 =
(T2 + T3 + T4 + T14) + (T8 + T9 + T10 + T16) = S2 + S4. Z toho vyplýva, to čo sme chceli dokázať, že súčet plôch oproti sebe je rovnaký.
Bodovanie: Tento príklad sa dal dokázať ďalšími dôkazmi. Za správny dôkaz bol plný počet bodov t.j. 5 b. Ak tam bola nejaká chybička tak som strhol 0,5 – 1,5 b v závislosti od chyby. Ak bol dôkaz čiastočný t.j. napr.: iba pre obrázok rovnobežný s rámikom tak za to bolo 1 – 3 body. Ak ste dosadili iba nejaké namerané hodnoty tak to som hodnotil od 0,5 – 1,5 b.

Príklad S2: Fúru peňazí *opravoval Peter Comp Ambrož*

Prvé dvojčíslie nech je **x** a rozdiel medzi prvým a druhým, resp. druhým a tretím dvojčíslím nech je **y**. Druhé dvojčíslie bude **x + y** a tretie bude **x + y + y = x + 2y**. Teraz chcem vyjadriť celé 6-ciferné číslo. Pomocou **x** a **y** bude vyzerať nasledovne: 10000.**x** +

100.(**x+y**) + 1.(**x+2y**) a to sa rovná 10101.**x** + 102.**y**. Ďalšou úpravou získam 3.(3367.**x** + 34.**y**) čo je zjavne deliteľné 3 bezo zvyšku. Samozrejme, aj iné spôsoby riešenia som uznával a oceňoval 5 bodmi.

Bodovanie: 5 bodov každému, kto dokázal deliteľnosť tromi pre všetky možnosti všeobecne. 4 body pre tých, ktorí ku dôkazu využili skutočnosť, že súčet tých troch 2-ciferných čísel je deliteľný tromi, ale neukázali, prečo to tak je. 3 body ak ste nedokázali deliteľnosť pre všetky čísla všeobecne, ale len pre istú skupinu čísel. 2-0 bodov za isté úvahy, ktoré mohli viesť ku správnemu výsledku.

Príklad S3: Na ostrove *opravoval Martin Malic Handlovič*

Príklad sa na prvý pohľad zdá neriešiteľný, ale po pár pokusoch prídete na to, že dýka stojí 4 pesos. Ak si označíme V ako počet volov, O počet oviec, K cenu kozy a D cenu dýky, tak podľa zadania platí V.V = 10.O + K a 10 = K + D. Keďže po delení im zostala jedna ovca, tak číslo V^2 má na mieste desiatok nepárnu číslicu. A teraz príde kameň úrazu. Väčšina z Vás, správne zistila že tomuto vyhovujú čísla 4, 6, 14, 16, 24, 26 ....atď., ale ukázať, že všetky tieto čísla majú v druhej mocnine na predposlednom mieste nepárnu cifru a končia na 6, ukázalo málo z Vás, teda skúste si vyriešiť príklad:

Ak čísla 4, 6, 14, 16, 24, 26 majú na poslednom mieste 6 a na predposlednom mieste nepárnu cifru, majú túto vlastnosť aj ostatné čísla končiace na 4, alebo 6? Prečo?

Ak teda úspešne vyriešite tento príklad, potom je jasné, že koza stála 6 pesos, a teda dýka stála 4, alebo 2 pesos, podľa toho, ako ste uvažovali.

Pochvala: Všetkým, ktorí uvažovali, že ak Džajbo dal dýku Skovovi, tak ju treba odrátať od jeho majetku, a potom im vyšlo, že dýka stojí 4/2 = 2 pesos, udeľujem veľkú pochvalu.

Bodovanie: Za správne riešenie som dával 5 bodov, za výsledok bol 0,5 bodu, za postup 2 body a za vysvetlenia bolo zvyšných 2,5 bodu. Za riešenie bez vyriešenia príkladu hore, bolo väčšinou od 2 do 4 body podľa kvality. Ak ste len našli jedno riešenie pre V, a z toho ste odvodili koľko je cena dýky, bolo od 1 do 2,5 bodu, podľa kvality.

Príklad S4: Škrtov *opravovala Alenka Kovárová*

Tento príklad bol dosť ťažký, lebo zadanie sa dalo pochopiť mnohými spôsobmi a podľa toho vám vychádzali riešenia. Takže uvediem taký všeobecný postup a potom rôzne chápania slova „zhluk“ a k ním riešenia.

Pravidlá upravovania sú jasné. Treba si len uvedomiť, že ķśķ sa môže a nie musí vymeniť za ķ (a nie naopak), rovnako pre śķś a ś a že ķķ sa dá nielen ubrať, ale sa dá aj pridať. To, že sa niečo môže a dá urobiť ešte neznamená, že sa to musí. Kľúčovým v tomto príklade je to, že pri hraní sa so slovami prídete na to, že každé ś sa dá zmeniť na ķ: ś → ķķśķķ → ķķķ → ķ. Teda nech je v ľubovoľnom slove tých ś koľko chce, všetky potrebné zmením na ķ a potom tie ķ-čka po dvojiciach vyškrtám. Takto sa vždy dopracujem iba k niekoľkým základným slovám. Ešte si treba uvedomiť dve podstatné veci. Jedna je, že každé slovo by sa malo dať upraviť na jedno zo základných slov, lebo však základné slová sú od toho, že sa používajú namiesto tých dlhších. A druhá vec je, že skracovať má význam len dovtedy, kým po skrátení dostanete opäť slovo, leboináč to nie je skrátenie, ale zrušenie slova.

Ak zhluk je minimálne jednopísmenové slovo, tak základné slová sú ķ a ķķ (všetky ś zamením za ķ a podľa toho, či ich slovo malo párny alebo nepárny počet písmen, tak po vyškrtaní ķ-čkových dvojíc mi zostane buď ķ alebo ķķ).

Ak zhluk je viac ako 1 hláska, tak dostanem základné slová ķķ a ķķķ.

Ak zhluk ś a ķ sú minimálne 2 hlásky, z ktorých aspoň 1 je ķ a aspoň 1 je ś, tak základné slová sú ķś, śķ, ķķś a ķśķ.

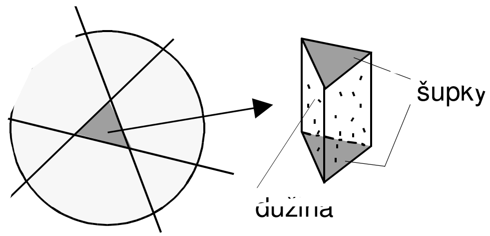
Bodovanie: Ak ste došli k jednému týchto troch riešení a nezabudli ste odôvodniť, že viac základných slov naozaj nie je, dostali ste 5 bodov. Ak ste neprišli na to, že ś sa dá zameniť za ķ, vyšlo vám nekonečne veľa základných slov a mohli ste získať maximálne 3 body.

Príklad S5: Babku samurajku *opravoval Peter Mitec Miťko*

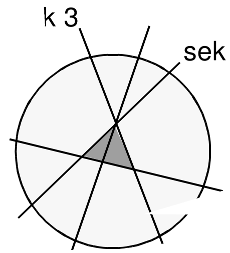
V prvom prípade babka samurajka rozsekala melón na 7 častí a keďže po deťoch ostalo 8 šupiek mohlo to znamenať len to, že jeden kúsok mal 2 šupky (to mnohí z vás akosi nechceli pochopiť). Seky mohli teda ísť napríklad tak, ako je na obr. 1. Čo bolo však dôležité je, že seky museli byť z nášho pohľadu kolmé na rovinu papiera. V druhom prípade stačilo rozseknúť tú časť s dvomi šupkami a 10 detí by bolo sýtych a aj úloha splnená (obr. 2). Dalo sa pravda aj inak (obr. 3.). S treťou časťou príkladu ste mali najväčšie problémy (na ňu som si aj ja musel zobrať jablko a grep :) Tromi sekmi dokážeme rozdeliť melón maximálne na 8 častí (všetky 3 rezy budú napríklad na seba kolmé – obr. 4.) Teraz už stačilo iba seknúť tak, aby sme rozpolili 7 z ôsmich častí a úloha je splnená. Rez vtedy nesmel prechádzať bodom spoločným pre prvé 3 seky (roviny), lebo tak by sme nedostali ten kúsok bez šupky (obr. 4.). Musel viesť buď nad tým bodom alebo pod ním, skrátka tak, aby ste zasiahli tých 7 kúskov (ak bol ten bod v strede melóna, tak to bolo jedno či nad, alebo pod).

Podľa teórie sa dá jedným sekom rozdeliť guľa na 2 časti. Dvoma sekmi na 4 a troma na 8 častí. Čo myslíte, dá sa štyrmi sekmi rozdeliť guľa na 16-násť častí? Či áno, alebo nie, to niektorí z vás aj dokázali, aj keď o tom možno nevedia (česť výnimkám;)

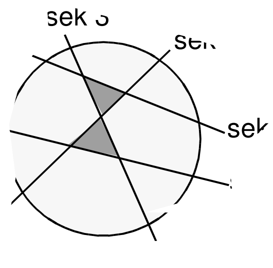
Bodovanie: Za prvú časť úlohy som dával 1,4 bodu, za druhú 1,6 bodu a za tretiu 2 body. Za menšie chyby som strhával od 0,1 po 0,5 b.



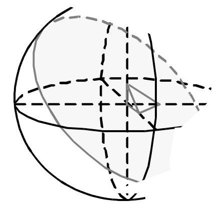
brázok 1



zok 2



ázok 3



zok