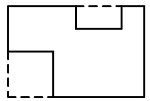
PIKOMAT ,**20. ročník** **šk. rok 2002/2003**

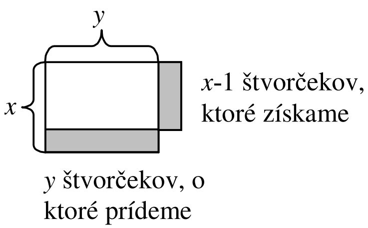
Vzorové riešenia 2. série letnej časti kategórie 7-9

Príklad S1: *opravovala Majka Hanulová*

Sieťka má rozmery 50 x 50 cm^2, to je 2500 cm^2. Tvorí ju 625 štvorčekov. Jeden štvorček má teda plochu 2500 cm^2 / 625 = 4 cm^2 a stranu dĺžky $a = 2$ cm. Mravček prešiel cestu dlhú 1 m, to je $50a$. Aký tvar má mať mravčekova cesta, aby útvar ňou uzavretý mal čo najväčší obsah? Zoberme si ľubovoľný šišatý tvar, ako na obrázku vľavo (nakreslený plnou čiarou). Ku každému takémuto tvaru vieme nájsť obdĺžnik, ktorý má rovnaký alebo menší obvod, ale väčší obsah. Stačí všetky rohy, ktoré smerujú dovnútra, vyvrátiť von, ako je to na obrázku vľavo naznačené čiarkovanou čiarou. Najlepší tvar je preto obdĺžnik. Aké budú dĺžky strán tohto obdĺžnika? Označíme jeho strany x, y, a nech x < y. Jeho obvod je $2x + 2y$ a to je $50a$, teda $x + y = 25a$. Súčet $x + y$ je vždy rovnaký, takže keď x o 1 zmenšíme, y sa o 1 zväčší. Porovnáme obsah obdĺžnika so stranami x, y a so stranami x-1, y+1.



y+1. Obdĺžnik so stranami x, y má obsah xy. Keď z neho utvoríme obdĺžnik x-1, y+1, prídeme o riadok s y štvorčekmi a pribudne nám stĺpec s x-1 štvorčekmi. A pretože $x < y$, má tento obdĺžnik x-1, y+1 menší obsah ako obdĺžnik x, y. Je to nakreslené na obrázku. Z toho vyplýva, že najväčší obsah pri danom obvode má obdĺžnik, ktorého dĺžky strán sú celé čísla „najbližšie pri sebe“. Pri obvode $50a$ je to obdĺžnik so stranami $12a$, $13a$. Jeho obsah je 156 štvorčekov.



Bodovanie: 1 bod za vypočítanie plochy a dĺžky strany jedného štvorčeka; 2 body za správne riešenie; 2 body za dôkaz, že je to skutočne najväčší možný útvar; ak ste našli menší útvar, počet bodov je menší

Príklad S2: *opravovala Alena Kovárová*

Označme naše trojciferné čísla a, b, c a d, pričom vieme, že všetky tri začínajú rovnakou cifrou f a ich súčet je S. Uvažujme, že $a < b < c$ a že x, z, y sú celé čísla, pre ktoré platí $a.x = b.y = c.z = S$, z čoho potom vyplýva, že $x > y > z$.

Najskôr rozoberme možnosť, keď $f = 1$. Potom vieme, že

minimálny súčet je $min\ S = 100 + 101 + 102 + 103 = 410$

a maximálny súčet je $max\ S = 196 + 197 + 198 + 199 = 790.$

Teda minimálna hodnota z, ktorá prichádza do úvahy je približne $mz = 410 : 199 = 2{,}06$ a maximálna hodnota x, ktorá prichádza do úvahy je $mx = 790 : 100 = 7{,}9$. Pretože x, y a z sú celé čísla a $mx > x > y > z > mz$, tak x, y, z môžu teoreticky byť len čísla 3, 4, 5, 6 a 7. Čísla 100 – 199 majú

?-násobok	3-nás.	4-nás.	5-nás.	6-nás.	7-nás.
na intervale	300-597	400-790	500-790	600-790	700-790

Vieme, že S musí patriť trom z týchto intervalov – musí byť násobok troch čísel. To môže len vtedy, ak S je z intervalu 500-597, teda $x = 5$, $y = 4$, $z = 3$.

Pre nasledujúce f sú možnosti rozobrané v tabuľke

f	1	2	3	4	5	6	7	8	9
min S	406	806	1206	1606	2006	2406	2806	3206	3606
max S	790	1190	1590	1990	2390	2790	3190	3590	3990
mz	2,04	2,70	3,02	3,22	3,35	3,44	3,51	3,57	3,61
mx	7,9	5,95	5,3	4,98	4,78	4,65	4,56	4,49	4,43
x, y, z	3,4,5,6,7	3,4,5	4,5	4	4	4	4	4	4
trojice $\{x,y,z\}$	{3, 4, 5}	{3, 4, 5}	-	-	-	-	-	-	-

Ako vidno z tabuľky, do úvahy prichádza len jedna možnosť pre x, y a z. Je zrejmé, že x, y aj z delí S, preto aj ich najmenší spoločný násobok - $nsn\ (x, y, z) = 60$ delí S. Pre $f = 1$, u6 vieme, že S je niekde medzi 500 a 597, teda jediná možnosť je $S = 540$. Potom by $a = 540{:}5 = 108$, $b = 540{:}4 = 135$, $c = 540{:}3 = 180$, $d = 540 - 180 - 135 – 180 = 117$. Ak $f = 2$, tak keď si spravíme rovnakú tabuľku s ?-násobkami na intervaloch, tak zistíme, že neexistuje také S, ktoré by patrilo trom intervalom.

Teda existuje jediné riešenie: Alenka musí postaviť na sever 180, na východ 135, na juh 117 a na západ 108 škriatkov.

Bodovanie: Iba správny výsledok sú 2 body, ak ste aj niečo ohraničili, tak ešte +0,5 bodu, riešenie s postupom, kde nie je ukázané, že je to jediné riešenie 3-4 body, správne riešenie s postupom 5 bodov

Príklad S3: *opravoval Maťko MH Hriňák*

Keďže len 70% škriatkov má hnedé oči, maximálne 70% škriatkov môže spĺňať ideál krásy. To, že táto možnosť môže nastať si overíme tak, že 70% škriatkom dáme všetky 4 vlastnosti a ostatné rozdelíme ľubovoľne. Na druhej strane vieme, že určite 30% škriatkov nemá hnedé oči, 25% nemá tmavé vlasy, 15% nie je vyšších ako 78 cm a 10% váži aspoň 15 kg. Keďže ideál musí mať všetky 4 vlastnosti, tak škriatok nie je ideálny, ak mu jedna z týchto vlastností chýba. Ak tie vlastnosti rozdelíme tak, že nejakých 30% nebude mať hnedé oči, iných 25% nebude mať tmavé vlasy, iných 15% nebude vyšších ako 78 cm a zase iných 10% bude vážiť aspoň 15 kg, tak určite 80% škriatkov nebude ideálnych. Tých zvyšných 20% už ideálnych bude, lebo na nich „neostali zlé vlastnosti“.

Bodovanie: 2 body za maximálny počet ideálnych škriatkov, 3 body za minimum. Niektorí z vás si nevšimli, že ideálni sú škriatkovia, ktorí sú ľahší ako 15 kg...

Príklad S4: *opravovala Táňa Viszusová*

Máme nájsť 20 najbližších zakliatych dátumov, od dňa, keď bol termín odoslania druhej série. ☺ Začnime 21. storočím. Zatiaľ boli roky 2000, 2001, 2002 a 2003. Teda hľadáme také dve čísla, ktorých súčet je 20 a súčin 0,1,2 alebo 3. Navyše, aby to mohli byť čísla dní a mesiacov, musia byť prirodzené a jedno menšie ako 31 a druhé menšie ako 12. Ich súčin musí byť menej ako 100 (aby to mohlo byť posledné dvojčíslie). Je jasné, že vyhovujúce prirodzené čísla nemôžu existovať. Poďme do 20. storočia. Roky sa tu začínajú na 19. 19 vieme rozložiť na súčet nasledovnými spôsobmi:

19 = **18 + 1 = 17 + 2 = 16 + 3 = 15 + 4 = 14 + 5 = 13 + 6 = 12 + 7 = 11 + 8 = 10 + 9**.

Z posledných troch možností dostaneme dva dátumy, pretože môžeme vymeniť deň a mesiac. Vynásobením dvojíc dostaneme posledné dvojčíslie roku a teda máme celý dátum. Sú to tieto dátumy:

18.1.1918, 17.2.1934, 16.3.1948, 15.4.1960, 14.5.1970, 13.6.1978, 12.7.1984, 7.12.1984, 11.8.1988, 8.11.1988, 10.9.1990, 9.10.1990. Je ich 12 a ďalšie už v tomto storočí nie sú, pretože 19 nevieme na súčet rozložiť iným spôsobom. My však potrebujeme nájsť 20 dátumov. Takže ideme do 19. storočia. Rovnakým spôsobom ako v 20. stor. prídeme k nasledujúcim 12 dátumom. Zoradím ich rovno od časovo najbližšieho k najvzdialenejšiemu.

9.9.1881, 8.10.1880, 10.8.1880, 7.11.1877, 11.7.1877, 6.12.1872, 12.6.1872, 13.5.1865, 14.4.1856, 15.3.1845, 16.2.1832, 17.1.1817. Teraz už len zistím, ktorý dátum je teda chronologicky dvadsiaty a ten je dňom zakliatia Mutádu. Je to 13.5.1865.

Bodovanie: Polbody sa strhávali za to, ak ste zabudli na 21. storočie, ak ste nezdôvodnili, podľa čoho ste vybrali tých osem dátumov z 19. storočia, ak ste urobili niekde numerickú chybu, prípadne bod šiel dole, ak ste zaslali príklad bez zdôvodnenia čo ste ako a prečo robili alebo keď bolo tých numerických chybičiek viac. Takže tak.

Príklad S5: *opravovala Kami Vyslocká*

Úloha sa dala riešiť viacerými spôsobmi, asi najbrilantnejší z nich je tento: Vieme, že hus s kozou spolu spasú typickú lúku za 60 dní. A keďže krava spasie rovnako trávy ako koza spolu s husou, tak aj krave samotnej bude trvať spasenie typickej lúky 60 dní. Teda za 60 dní by všetky tri Reitsapove zvieratá spoločne spásali 2 typické lúky. Jednu teda spasú za 60/2 = 30 dní. A to je všetko.

Bodovanie a komentár: Za správne riešenie s náznakom, ako ste na to prišli bol 1 bod, za nesprávne 0,0 - 0,5. Za vysvetlenie 0,0 – 4,0 bodu.

Niektorí z Vás zrátali aj to, za aký čas spasú typickú lúku jednotlivé zvieratká osamote. Nuž a pritom vychádza vcelku zaujímavý výsledok: Hus má dvakrát taký apetít ako koza!! Zaujímavé, že?

Príklad S6: *opravoval Comp*

Pri tomto príklade si treba uvedomiť, že tie hrnce nie sú odmerky, a teda prelievať sa môže len dvoma spôsobmi. Buď sa preleje celý hrniec, alebo sa prelieva, pokým druhý hrniec nie je plný. Povoľoval som aj vylievanie vody, ale k správnemu riešeniu to nebolo potrebné. Existuje veľké množstvo riešení. Tu je jedno z možných: (Máme 3 hrnce A, B, C – 19 l, 13 l, 7 l). Začíname s plným 13 l a 7 l hrncom → 0, 13, 7. 7 litrov prelejem z C do A, potom z B doplním A na 19 litrov a odtiaľ 7 litrov odlejem do C → 12, 1, 7. Teraz musím odliať 2 l aby som dostal v A 10 litrov. Odliatie 1 litra sa dá rozložiť na 3 kroky: odliať 7 l, doliať 13 l, odliať 7 l. Odliatie 7 l je ľahké, najprv si „odložím“ vodu z C do B (12, 8, 0), potom z A naplním C (5, 8, 7). Pokračujem tak, že z C doplním do B na 13 l (5, 13, 2) a tých 13 l dolejem do A (18,0,2). Ešte musím odliať 7 l, takže si „odložím“ vodu z C do B (18, 2, 0) a do C tých 7 l odlejem z A. Stav je teraz 11, 2, 7. Opakujem znovu postup na odliatie 1 litra. (11, 9, 0 → 4, 9, 7 → 4, 13, 3 → 17, 0, 3 → 17, 3, 0 → 10, 3, 7). Nakoniec sme v A dostali 10 litrov vody.

Bodovanie: 5 bodov za uvedenie krok po kroku, ako ste prelievali až po výsledných 10 litrov. Pokiaľ ste viackrát dopĺňali vodu do hrncov, príp. nezačali ste z pozície 0,13,7 bolo to za 4,8 b. Ak sa v riešení vyskytlo viac hrncov ako tie 3 zadané, bolo to za 3,2 b. Za nesprávne prelievanie litrov (..prelejem 6,5 litra..) 3 body. Tí, čo nenašli riešenie (a napísali dôvod) 0,5 b.