D = Dračí pazúr, N = Neznáma, K = vodopád Kameň, J = Jaskynná chata, B = Biely kopec
D', N', K', J', B' sú to isté, len s nulovou nadmorskou výškou. Označme |NN'| = n. Podľa zadania |D'N'| = |J'N'| = |D''N''| = |JN''| = x, |K'N'| = |N'B'| = |KN''| = |N''B''| = y, kde D'', N'' a B'' sú v nadmorskej výške 375 m n.m. Podľa vety uuu sú trojuholníky KDD'' a KNN'' podobné. Rovnako trojuholníky JBB'' a JNN'' sú podobné. Teda pre pomery strán platí
|N''K| : |D''K| = |NN''| : |DD''| ⇔ y : (x + y) = n : 1000 a
|N''J| : |B''J| = |NN''| : |BB''| ⇔ x : (x + y) = n : 1200
Keď tieto dve rovnice sčítame, dostaneme x : (x + y) + y : (x + y) = n: 1000 + n : 1200. Ľavá strana sa rovná 1, takže po úpravách dostaneme 1 = (12n + 10n) : 12000 => n = (12000 : 22) m = 545,4545... m Teda nadmorská výška neznámej je |N'N| = |N'N''| + |NN''|, čo je približne 375 m n.m. + 545,5 m = 920,5 m n.m.
Bodovanie: Za nesprávny výsledok ste mohli dostať najviac 2 body. Ak ste to mali správne, tak som vám 0,5 bodu strhla za zámenu šikmých a vodorovných vzdialeností, 0,5 boda, ak ste zabudli pripočítať 375 m a 1 bod, ak ste neuviedli, že na základe podobnosti niektorých trojuholníkov platí rovnosť pomerov ich strán (niektorí uviedli iba rovnicu bez vysvetlenia jej vzniku).

Príklad S6: *opravoval* ***Pavol PC Cvik***
Tento príklad sa dal vyrátat aj tak, že by sme sčítali všetky čísla,ktoré Jožko napísal. Šlo to však aj omnoho jednoduchšie. A ako?Zoberme si čísla od 0 po 999. Vytvoríme si dvojice: 0+999, 1+998, 2+997,4+995 ... Súčet každej dvojice bude 999. Koľko je čísiel, ktorésčítavame? Je to 8 v každej desiatke, 8 desiatok v stovke, 8 stoviek v tisícke. Dvojíc bude teda 8x8x8/2=256 (Uvedomme si, že keď jedno z čísiel obsahuje 3, tak druhé obsahuje 6 a takéto dvojice nezarátame). Keď už vieme počet dvojíc a súčet každej z nich, tak ich vynásobíme 256x999=255744. Toto isté zopakujeme aj pre čísla od 1000 do 1999 (dvojice majú súčet 2999) a dostaneme : 256x2999=767744. Pre tretiu tisícku dostaneme 256x4999=1279744.Tieto čísla už iba sčítame a zistíme, či je súčet delitelný 6 a 9. Súče je 2303232, teda 6-timi je delitelny a 9-timi nie.
Bodovanie: Keďže spôsobov riešenia bolo veľa, body sa udeľovali podľa toho, ako ste svoje riešenie zdôvodnili. Chyby boli rôzne, rôzne závažné a aj súčet ste mali často rôzny.

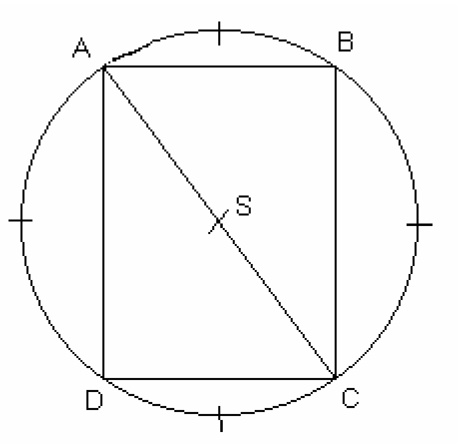
PIKOMAT, 20. ročník **šk. rok 2002/2003**

Vzorové riešenia 1. série zimnej časti kategórie 7-9

Príklad S1: *opravoval* ***Martin Malic Handlovič***
K správnemu riešeniu viedlo v podstate veľa ciest, ale toto je asi taká najľahšia a najjednoduchšia. Táto metóda je skúšobná. Stačí postupne vyskúšať za zlodeja všetkých podozrivých. **Laco:** Ak by bol zlodej, tak by všetky vety povedal pravdivo, čo ale podľa VM (vety manželiek) nemože byť a tak Laco to byť nemohol. **Stano:** Ak by to bol Stano, tak by Laco povedal prvú a tretiu vetu určite pravdivo a podľa VM musel povedať druhú nepravdivo. Lenže potom by Rado povedal tri krát pravdu, čo podľa VM nemohol. Takže ani Stano to byť nemohol. No a tak ostáva Rado a ten to bol. TU SA ALE ÚLOHA NEKONČÍ. Treba ešte overiť, či bude podmienka VM platiť aj keď by bol zlodej Rado. **Rado:** Ľahko si overíte aj Vy, že pre Rada podmienka VM platí a dokonca je úplne jedno, či Laco bol, alebo nebol v hodinárstve. No a tak je jasné, že zlodejom bol Rado.
Komentár a bodovanie: Viacerí z Vás sa viac venovali psychológii, ako matickej časti príkladu. To, či sa niekto bráni, a či len obviňuje ostatných nie je riešenie. No a mnohým z Vás stačilo vylúčiť Laca a Stana a príklad bol pre Vás hotový, ale ono to nemuselo výjsť. Takže to bolo treba overiť. Viacerí z Vás si povedali, že nejaká veta platí a logicky určili všetko ostatné. No a potom ešte oskúšali ako to bude vyzerať, keď tá veta nebude platiť.Za výsledok bolo 0,5 boda a za vysvetlenie, že to Laco a Stano nebol, resp. Rado to bol bolo po 1,5 boda. Pri iných metódach sa bodovanie upravovalo podľa toho akú metódu ste zvolili.

Príklad S2: *opravoval* ***Ivan Jarík Kohút***
Úloha má dve na sebe nezávislé časti: „a)“ a „b)“.
a) Úloha znie, či v hocijako vykladaných hodinkách sa dá nájsť rovnostranný trojuholník, ktorého vrcholy tvoria drahé kamene rovnakého druhu (farby), napr. tri smaragdy alebo tri rubíny.
Rovnostranný trojuholník má všetky tri strany rovnako dlhé a rovnako veľké všetky tri vnútorné uhly (60 stupňov). Hodinky majú 60 minútových čiarok, teda na jednu stranu trojuholníka prípadne 20 čiarok (drahých kameňov). To tiež znamená, že medzi dvoma vrcholmi rovnostranného trojuholníka sa musí nachádzať 19 iných drahých kameňov, ktoré môžu a nemusia mať rovnakú farbu ako kamene, ktoré tvoria rovnostranný trojuholník. Trojuholník môže byť vytvorený z kameňov na týchto minútových čiarkach: 0,20,40; 1,21,41; 2,22,42; .... 18,38,58; 19,39,59 = spolu 20 rovnostranných trojuholníkov. Všimnime si tiež, že každý drahý kameň patrí práve jednému rovnostrannému trojuholníku, z čoho vyplýva, že všetky rovnostranné trojuholníky sú na sebe nezávislé – zmena kameňa v jednom trojuholníku nebude mať vplyv na žiaden iný trojuholník. Ak sa vrcholy každého rovnostranného trojuholníka skladajú z dvoch rubínov a jedného smaragdu alebo z dvoch smaragdov a jedného rubínu, tak sa nám určite nepodarí nájsť taký rovnostranný trojuholník, ktorý má vrcholy na drahých kameňoch rovnakého druhu. Policajt nemal pravdu.
b)Úloha znie, či v hocijako vykladaných hodinkách sa dá nájsť pravouhlý trojuholník, ktorého vrcholy tvoria drahé kamene rovnakého druhu (farby), napr. tri smaragdy alebo tri rubíny.
Pravouhlý trojuholník má jeden uhol pravý a dva ostré.
Pravouhlé trojuholníky sa dajú vytvoriť pomocou obdĺžnikov a to dvoma spôsobmi:
1. Vpísaním obdĺžnika vzniknú dva pravouhlé trojuholníky, ktoré budú mať spoločnú preponu(uhlopriečka obdĺžnika).
2. V tomto obdĺžniku budeme posúvať bod D po hodinkách v oblúku AC(alebo bod B z druhej strany oblúka). Pravouhlé budú preto, lebo na druhej strane môžeme tiež posúvať bod B(bod D) tak aby body A,B,C a D vždy tvorili obdĺžnik, v ktorom vieme, že má všetky vnútorné uhly pravé. Takto zahrnieme <u>všetky</u> možné pravouhlé trojuholníky.
Všimnime si, že prepona všetkých pravouhlých trojuholníkov ide cez stred hodiniek (lebo je to uhlopriečka obdĺžnika). Spolu môžeme vytvoriť tridsať rôznych prepôn (na obrázku môže byť AC v 30 rôznych polohách). Ku každej takejto prepone môžeme vytvoriť 29 pravouhlých trojuholníkov, lebo bod D môžeme dať na 29 rôznych miest (medzi A a C je 29 minútových čiarok). Zároveň ale

môžeme vytvoriť 29 trojuholníkov na druhej strane, lebo bod B tiež môže obsadiť 29 rôznych pozícií. Dokopy môžeme vytvoriť 30 x (29 + 29) = 1740 pravouhlých trojuholníkov.
Keďže všetky trojuholníky sú závislé na prepone, ktorá je tvorená protiľahlými minútovými čiarkami, stačí nám, aby každá prepona bola tvorená dvoma rôznymi kameňmi. Potom sa nebude dať vytvoriť pravouhlý trojuholník z troch kameňov rovnakej farby nech by už bol tretí bod (drahý kameň) akýkoľvek. Najjednoduchší príklad je poukladať kamene takto: 0 – smaragd, 30 – rubín; 1 – smaragd, 31 – rubín; ......29 – smaragd, 59 – rubín = prvých 30 kameňov smaragdy, druhých 30 kameňov rubíny. Policajt nemal pravdu.
Bodovanie: Časti „a)“ a „b)“ boli hodnotené nezávisle.
Za „a)“ sa dalo získať 2 body v prípade, že bol uvedený príklad hodín, v ktorých sa rovnostranný trojuholník nedá nájsť a bolo stručne vysvetlené prečo, resp. podmienky, ktoré by museli hodinky spĺňať, aby sa dal nájsť rovnostranný trojuholník.
Za „b)“ sa dali získať 3 body v prípade, že bol uvedený príklad hodín, v ktorých sa pravouhlý trojuholník nedá nájsť a bolo stručne vysvetlené prečo (napr. všetky dvojice protiľahlých kameňov sú zložené z rôznych kameňov), resp. podmienky, ktoré by museli hodinky spĺňať, aby sa dal nájsť rovnostranný trojuholník.
V prípade len uvedenia príkladu, kde sa zvláštny trojuholník nedá nájsť som počet získaných bodov znížil o jednu tretinu (2/3 bodu pri „a)“ a 1 bod pri „b“).V prípade nesprávnych výsledkov alebo správnych výsledkov a nesprávnych postupov som udeľoval 0 bodov. V prípade, že riešiteľ mal správny výsledok, ale vysvetlil ho len pre nejakú obmedzenú skupinu trojuholníkov, tak dostal 0,5 bodu.



Príklad S3: *opravoval* ***Martin MH Hriňák***
Pri Janovi si môžeme všimnúť, že každý rok sa mu urodí dvojnásobok toho, čo rok predtým plus 126 vriec. Dá sa na to prísť aj tak, že ak odčítame za sebou idúce roky, dostaneme nasledujúce čísla:

7	140	406	938	2002	4130
	133	266	532	1064	2128

Vidíme, že čísla v druhom riadku sa stále zdvojnásobujú. Preto sme doplnili číslo 2128, a teda Jano bude mať v roku 2003 4130 vriec fazule.
Pri Mišovi máme oveľa viac možností. Jednou z nich je, že použijeme rovnaký postup. Môžeme ho zapísať aj tak, že prvý rok mal Mišo 7 vriec, druhý $7 + x$, tretí $7 + x + 2x$, štvrtý $7 + x + 2x + 4x$, ..., až v roku 2002 to je $7 + x + 2x + 4x + 8x + 16x + 32x = 7 + 63x$. Riešime potom rovnicu $2002 = 7 + 63x$, odkiaľ $x = 31 + 2/3$. Potom už len dopočítame jednotlivé počty vriec, pričom pamätáme na to, že zapisujeme len celé vrecia, ale tie zvyšky, ktoré sme raz nezapočítali, nevyhadzujeme, ale ich odkladáme a na ďalší rok počítame s nimi. Keďže aj tých 2002 vriec mohlo byť zaokrúhlených, musíme počítať aj s tým, že $2003 > 7 + 63x$. Dostávame takéto možné postupnosti:

1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
7	38	102	228	482	988	2002
7	38	102	228	482	989	2002

Ďalší spôsob riešenia je ten, že predpokladáme, že prírastky rástli s časom:

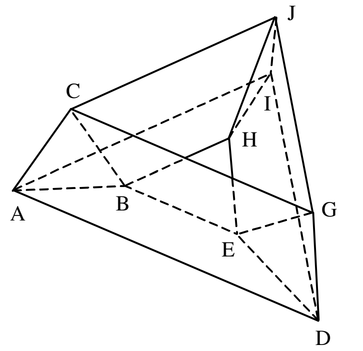
1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
7	7 + x	7 + x + 2x	7 + 3x + 3x	7 + 6x + 4x	7 + 10x + 5x	7 + 15x + 6x

Dostávame sa tak k rovnici $2002 = 7 + 21x$, odkiaľ $x = 95$. Potom dostávame nasledovnú tabuľku:

1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
7	102	292	577	957	1432	2002

Komentár a bodovanie: Za vyriešenie prvej časti (Jano) ste mohli získať 1,5 boda, za druhú časť 3,5. Prvá časť vám nerobila problémy, problémy sa vyskytli v druhej časti, kde ste nachádzali rôzne závislosti, z ktorých niektoré vyzerali veľmi náhodne... Za každú rozumne zdôvodnenú postupnosť ste mohli získať 4 body (ak bola správna, tak aj viac ...). Chyby sa vyskytovali aj pri zaokrúhľovaní a zanedbávaní neplných vriec. A dávajte si pozor na „rovnosti“ typu 1 + 1 = 2 + 2 = 4... Ako sami vidíte, 1 nie je rovné 4, ale veľa z vás to tak napísané malo.

Príklad S4: *opravovala* ***Kami Vyslocká***
Na tomto príklade ste sa museli trošku zahrať so svojou predstavivosťou. Riešení sa našlo viacero, jedno z nich nájdete na obrázku. Žiadaný dom vznikne napríklad, keď vezmete tri trojboké hranoly, zrežete ich z oboch strán a spojíte. (Vrcholy sú označené písmenami, hrany sú čiary a steny sú: ADGC, BEGC, ADEB, DIJG, EHJG, DIHE, AIJC, BHJC a ABHI).
Komentár a bodovanie: Najviac problémov sa vyskytlo s pochopením slova HRANA. Kto nepoužil špajlu ako hranu, stratil 2body. Za iné nedostatky sa strhávalo 0,5bodu. Ešte chválim originalitu všetkých antén, sušičiek prádla a všeličoho možného, čo ste povymýšľali (žiaľ, za to body neboli).☺



Príklad S5: *opravovala* ***Alenka Kovárová***
Mnohí z vás namiesto počítania merali vzdialenosti, čo však nie je presné. Väčšina z vás si myslí, že na mape sa dajú merať vzdialenosti medzi vrcholmi kopcov, čo je hlboký omyl. Na rovinnej mape odmeriate iba vodorovnú vzdialenosť, teda vzdialenosť jednotlivých objektov, ktoré majú akoby nulovú nadmorskú výšku (vzdialenosť ich priemetov). Takže ak sa na kopce pozeráme kolmo spredu,
uvidíme