PIKOMAT

Vzorové riešenia 2. série zimnej časti, kategória 7-9

Príklad S1: Bratia v kabínkach. *Opravoval Pavol „Tamara" Hronský.*

V tomto príklade bolo trochu náročné uvedomiť si, čo vlastne otázka v zadaní znamená a ako sa na ňu dá uspokojivo odpovedať. Našou úlohou je určiť, či si Zoltán správne pamätal, že jeden z bratov hovoril pravdu. Inými slovami: môžeme si naozaj byť istí, že aspoň jeden z bratov hovoril pravdu? Nuž, úplne istí si tým môžeme byť jedine vtedy, keď overíme všetky možné situácie, aké mohli nastať (kto mohol kedy klamať alebo hovoriť pravdu), a pritom nájdeme aspoň jedného z bratov, ktorý v každej situácii hovoril pravdu. Jeho meno je potom zároveň odpoveďou na druhú otázku v zadaní.

Pre jednoduchosť budeme bratov označovať prvými písmenami ich mien a ich pravdovravnosť alebo klamstvo číslami 1 alebo 0. Takže pri čítaní tohto textu si všetky jednotky môžete nahradiť slovami „hovorí pravdu" a všetky nuly môžete čítať ako „klame". Napríklad vetu *„Ak Ackerley klame, potom Dudley hovorí pravdu,"* skrátene zapíšeme takto: *„Ak A(0), potom D(1)."*

Teraz si poďme rozobrať, kto čo vlastne povedal a ako to mohlo ovplyvniť riešenie. Skúsme si najprv predstaviť, že A(1). Ak A(1), potom podľa jeho výpovedí B(0) aj C(0). C tvrdí, že D(0). Keďže ale C(0), potom musí platiť, že D(1). Ak teda D(1), potom musí platiť jeho výrok a tým pádom aj A(1) aj E(1). To je v súlade s naším začiatočným predpokladom o A(1), takže môžeme pokračovať. Pravdovravný E tvrdí, že F(0). Posledné tvrdenie, ktoré sme si ešte neskontrolovali, je tvrdenie od B, že A(0) a aj F(0). My už vieme, že B(0). Tu si však treba dať pozor na jednu vec: B sa vyjadril o dvoch bratoch naraz. Preto sa celý jeho výrok stáva nepravdivým už vtedy, keď je ktorákoľvek jeho časť nepravdivá. B tvrdil, že A(0) a aj F(0). My vieme, že A(1) a že F(0). Takže B síce povedal pravdu o F, no vyjadril sa nepravdivo o A, čo z celého jeho výroku robí nepravdivý. Takže naozaj B(0) a my môžeme bezpečne povedať, že kombinácia A(1), B(0), C(0), D(1), E(1), F(0) vyhovuje všetkým tvrdeniam.

Vychádzajme však teraz z predpokladu, že A(0). Ak A(0), potom podľa jeho výpovedí B(1) aj C(1). C teda pravdivo tvrdí, že D(0). Ak D(0), potom musí minimálne jeden z dvojice A a E klamať. Už z nášho predpokladu vieme, že A(0). To však ešte stále nič nehovorí o tom, či E klame alebo hovorí pravdu – aj keby klamal aj keby hovoril pravdu, obe možnosti vyhovujú klamstvu od D. Pozrime sa na tvrdenie od B. B(1), tým pádom A(0) a zároveň F(0). To, že F(0), vraví aj E, takže E(1). Opäť raz môžeme bezpečne povedať, že kombinácia A(0), B(1), C(1), D(0), E(1), F(0) vyhovuje všetkým tvrdeniam.

Tieto dve kombinácie sú jediné vyhovujúce pre všetky vyslovené tvrdenia. Keby sme na začiatku uvažovali s inými predpokladmi, vždy by sme sa dostali k jednej z týchto verzií, prípadne by sme došli k sporu, čo by znamenalo, že náš predpoklad bol nesprávny.

Keď porovnáme tieto dve možné kombinácie, zistíme, že iba jeden z bratov hovoril pravdu v oboch prípadoch. Preto si iba o ňom môžeme byť naozaj istí, že hovoril pravdu. Takže Zoltána jeho pamäť neklamala, jeden z bratov, ktorý určite hovoril pravdu, bol Emberley.

Bodovanie:
Strhnutia bodov odôvodnené priamo v riešení.

Príklad S2: Servisné lode. *Opravoval Pavol „Lietadlo" Koprda.*

V zadaní sa píše, že máme za písmená A-J dosadiť čísla od 0 po 9, za každé práve jedno, a to tak, aby platila rovnosť ABC – 2*(D+E+F+G+H+I+J) = 105. Máme zistiť, aké hodnoty môže nadobúdať číslo ABC, aby rovnosť platila.

Mnohí z vás príklad riešili tak, že čo najviac zmenšili interval, v ktorom sa číslo ABC mohlo nachádzať, a potom skúšali, ktoré hodnoty spĺňajú rovnosť zo zadania. Tento postup je dobrý, ja sa vám však pokúsim ukázať ešte jednoduchší spôsob, pri ktorom nebude potrebné skúšať toľko možností.

Najprv si pôvodnú rovnosť trochu upravíme, aby sme lepšie videli, čomu sa ABC vlastne rovná. ABC = 105 + 2*(D+E+F+G+H+I+J). Poďme zistiť, akú najväčšiu hodnotu môže mať číslo ABC. Chceme dosiahnuť najväčšie možné číslo, preto za čísla D-J dosadíme sedem najväčších cifier, teda cifry 3 až 9 (súčet 42). Najväčší možný súčet v zátvorke je 42 a tým pádom **najväčšia možná hodnota čísla ABC je** ABC=105+2*42=**189**. Keďže číslo ABC je trojciferné, ale nie väčšie ako 189, je jasné, že písmeno A musí mať hodnotu 1. Takže určite **A=1**.

Ďalej si môžeme všimnúť, že číslo ABC je súčtom nepárneho (105) a párneho (zátvorka po vynásobení dvojkou vytvorí párne číslo) čísla. Nepárne + párne = nepárne; takže ABC je nepárne číslo. Keď je ABC nepárne, znamená to, že **C je nepárne**. Cifru 1 sme už pridelili písmenu A, takže pre C ostávajú už iba štyri možnosti. **C = 3, 5, 7, 9**.

Teraz si rozpíšeme číslo ABC ako ABC = 100*A + 10*B + 1*C (ak tomuto spôsobu rozpisovania nerozumiete, skúste si napríklad číslo 326 rozpísať ako 326=100*3+10*2+1*6). Tiež vieme, že súčet všetkých použitých cifier (0 až 9) je 45. Takže

A+B+C+D+E+F+G+H+I+J=45. Upravíme túto rovnosť tak, aby sme videli, čomu sa rovná naša zátvorka z pôvodnej rovnosti v zadaní. (D+E+F+G+H+I+J)=45-(A+B+C)=45-A-B-C.

Toto všetko dosadíme do pôvodnej rovnosti – namiesto ABC napíšeme (100A+10B+1C) a namiesto zátvorky napíšeme (45-A-B-C).

$$100A + 10B + 1C - 2*(45 - A - B - C) = 105$$

Zátvorku roznásobíme a za A dosadíme 1.

$$100 + 10B + C - 90 + 2 + 2B + 2C = 105$$

Nakoniec posčitujeme to, čo patrí k sebe a zvyšnú rovnicu zjednodušíme tým, že obe strany vydelíme 3. Po sčítaní dostaneme: 12B + 3C = 93; a po zjednodušení dostaneme:

4B + C = 31.

Teraz už neostáva iné, len postupne za C dosadiť čísla 3, 5, 7 a 9 a skontrolovať, či vyhovujú.

C = 3	C = 5	C = 7	C = 9
4B + 3 = 31	4B + 5 = 31	4B + 7 = 31	4B + 9 = 31
4B = 28	4B = 26	4B = 24	4B = 22
B = 7	B = 6,5	**B = 6**	B = 5,5

Desatinné čísla nám rozhodne nevyhovujú, keďže B značí iba jednu cifru, preto dve možné hodnoty B sú 6 a 7. Riešenie: **číslo ABC môže mať hodnoty 167 a 173**.

Bodovanie:
obe správne riešenia a aspoň pár slov k nim – 2,5b.;
dopracovanie sa k výsledku – 2,5b.

Príklad S3: Heslo. *Opravoval Peter „Comp“ Ambrož.*

Kľúčom k úspechu pri tomto príklade bolo využitie čo najviac poznatkov o deliteľnosti čísel tak, aby sa množstvo možných hesiel zredukovalo a na konci stačilo overiť už len pár hesiel. Zhrňme si niektoré všeobecné pravidlá o deliteľnosti.
Deliteľnosť číslom 2: Posledná číslica je párna.
Deliteľnosť 3: Ciferný súčet je deliteľný 3.
Deliteľnosť 4: Posledné 2 číslice tvoria číslo deliteľné 4. A určite je deliteľné aj 2.
Deliteľnosť 5: Posledná číslica musí byť 5 alebo 0.
Deliteľnosť 6: Číslo je deliteľné 2 aj 3.
Deliteľnosť 7: Existuje pravidlo, no tu nie je vhodné, navyše nie každý ho pozná.
Deliteľnosť 8: Posledné 3 číslice tvoria číslo deliteľné 8. Určite je deliteľné aj 4 aj 2.
Deliteľnosť 9: Ciferný súčet je deliteľný 9. A tiež 3.

Vidíme, že číslice na 2., 4., 6., a 8. mieste musia byť párne, teda 2, 4, 6, 8. Tiež vidíme, že na 5. mieste musí byť 5, lebo nulu nemáme v ponuke. Na 1., 3., 7. a 9. pozícii musia byť teda nejako rozmiestnené zvyšné čísla 1, 3, 7, 9. Pozrime sa na miesta 3 a 4. Je tam nepárna a párna číslica. Tieto tvoria číslo, ktoré musí byť deliteľné 4. Ľahko sa presvedčíme, že všetky dvojciferné čísla, ktoré sú deliteľné 4 a začínajú nepárnou cifrou, musia končiť 2 alebo 6. Toto isté platí aj o 7. a 8. mieste, ktoré tiež tvoria číslo deliteľné 4. Na 4. a 8. mieste sú určite číslice 2 a 6, čím pre 2. a 6. miesto ostali možnosti 4 a 8. Aktuálnu situáciu možných číslic na jednotlivých pozíciach zachytáva nasledovná tabuľka.

miesto	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
možnosti	1, 3, 7, 9	4, 8	1, 3, 7, 9	2, 6	5	4, 8	1, 3, 7, 9	2, 6	1, 3, 7, 9

Vieme, že miesta 1 až 6 musia dať ciferný súčet deliteľný 3. V rámci toho však miesta 1 až 3 majú tiež súčet deliteľný 3. Z toho vyplýva, že aj miesta 4, 5 a 6 musia mať ciferný súčet deliteľný 3. To nám dáva možnosti 258 alebo 654 ako možné trojice na miestach 4 až 6. Rozoberme tieto možnosti.

258: Na 2. mieste bude teda 4 a na 8. mieste bude 6. Heslo zatiaľ vyzerá takto: **_4_258_6_**. Na 7. mieste musí byť 1 alebo 9, lebo iba tak vytvoríme číslo deliteľné 8. Je tam buď 816 alebo 896. Na prvých 3 miestach teraz pripadajú do úvahy kombinácie 147, 741, lebo iba tieto sú deliteľné 3. Preveríme, či čísla 1472589, 7412589 sú deliteľné 7. Ťažko zaplačeme, lebo to tak nie je. Ostáva nám teda druhá možnosť.

654: Heslo v tejto situácii vyzerá takto: **_8_654_2_**. Na 7. miesto pripúšťame iba cifry 3 alebo 7, lebo iba tak dostaneme čísla deliteľné 8. Sú to možnosti 432 a 472. Na prvých 3 miestach pripadajú do úvahy kombinácie 183, 189, 381, 789, 981, 987, ale určite nie 387, 783, lebo jedna z cifier 3, 7 je na 7. mieste. Ako teda môže vyzerať prvých 7 cifier hesla? Takto: **183**6547, **189**6543, **189**6547, **381**6547, **789**6543, **981**6543, **981**6547, **987**6543. Manuálne preveríme, ktoré sú deliteľné 7, zistíme, že vyhovuje iba jedna možnosť a víťazoslávne pripojíme na koniec chýbajúce cifry 29. **Heslo je 381654729** a davy jasajú!

Bodovanie:

správny výsledok, jasne vysvetlená cesta k nemu, z postupu vyplynulo, že je to jediné riešenie – 5b.;

správny výsledok – 1,5b. až 4b. – v závislosti od množstva nájdených pravidiel a zákonitostí;

bez správneho výsledku, nepresvedčivý postup – 0,5b. až 1b.

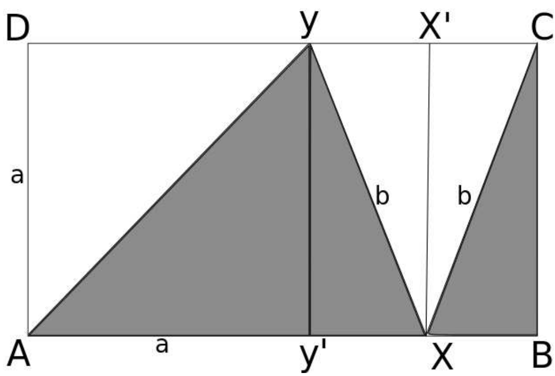
Príklad S4: Zvyšok lode. *Opravovala Diana „Dee“ Odrobináková.*

Pre začiatok bolo vhodné si nejako označiť body „oproti“ X a Y, napr X' a Y', pričom

$$|DY|:|YC|=|AY'|:|Y'B|,\ |DX'|:|X'C|=|AX|:|XB|$$

Strana CX je uhlopriečkou v obdĺžniku XBCX', takže ho rozdeľuje na polovice. Preto musí mať trojuholník XCX' rovnaký obsah ako trojuholník XBC, a to $6cm^2$. Zo zadania vieme, že $|CX| = |XY| = b$. Všimneme si, že trojuholník XX'Y je pravouhlý a má aj rovnakú výšku ako trojuholník XBC. Dĺžka strany Y'X bude (podľa Pytagorovej vety) zhodná s dĺžkou strany XB. A keďže strana XY je zasa uhlopriečkou v obdĺžniku Y'XX'Y a teda ho rozdeľuje na polovice (pričom má opäť rovnakú výšku ako trojuholník XBC), budú mať oba trojuholníky Y'XY aj XX'Y obsah $6cm^2$. Z toho odvodíme, že keďže trojuholník AXY má obsah $24cm^2$ a trojuholník Y'XY má obsah $6cm^2$, trojuholník AY'Y musí mať obsah $18cm^2$.

Zo zadania tiež vieme, že útvar AY'YD je štvorec, dokopy teda musí mať obsah $36cm^2$, z čoho vyplýva dĺžka strany ***a* = 6cm**. Druhú stranu obdĺžnika dopočítame pomocou vedomosti o rozmere XB, ktorú získame dosadením do vzorca na výpočet obsahu trojuholníka XBC: základňa * výška / 2 = $6cm^2$, pričom výška je 6cm (rovná sa strane *a*) a teda|XB|=2cm. Potom aj |Y’X|=2cm a teda **|AB|**=6+2+2 = **10cm**. Rozmery obdĺžnika sú **6cm** a **10cm**.



Bodovanie:
výsledok – 2b.;
správnosť a podrobnosť postupu – zvyšné 3b.

Príklad S5: Vesmírna kocka. *Opravoval Dominik „CD“ Csiba.*

Povrch pôvodnej kocky si označíme S a povrchy telies vzniknutých po jednotlivých krokoch nazveme postupne S_1, S_2, S_3. Spočítame si povrch kocky podľa vzťahu $S = 6a^2$. Vieme, že a = 100mm, takže S = 60000mm^2.

V prvom kroku vyrezávame z rohov pôvodnej kocky kocku s dĺžkou hrany 5mm. Vyrezávaná kocka má 6 stien, z toho 3 spoločné s rohom pôvodnej kocky – tie po vyrezaní ubudnú – a zvyšné 3 steny vyrezávanej kocky sú vo vnútri pôvodnej – tie sa po vyrezaní objavia. V každom rohu teda ubudnú tri steny a tri sa objavia, takže povrch sa nezmení a ostane $\boldsymbol{S_1} = S =$ **60000mm^2**.

V druhom a treťom kroku vyrezávame kocku s dĺžkou hrany 6mm. Pokračujeme druhým krokom – vyrezávaním na hrane pôvodnej kocky. Tu má vyrezávaná kocka 2 steny spoločné s povrchom pôvodnej kocky – tie po vyrezaní ubudnú – a 4 steny má vo vnútri pôvodnej kocky – tie sa po vyrezaní objavia. Na každej hrane teda ubudnú dve steny a objavia sa štyri steny vyrezávanej kocky. Povrch útvaru sa tým pádom na každej hrane zväčší o dve steny vyrezávanej kocky, čo je $(2*6^2) = (2*32) = 72$mm^2. Kocka má 12 hrán, takže bude vyrezaných 12 týchto kociek a plocha celého útvaru sa tak 12-krát zväčší o 72mm^2. Preto $\boldsymbol{S_2} = S_1 + (12*72) = 60000 + 864 =$ **60864mm^2**.

V treťom kroku sa vyrezáva priamo zo steny pôvodnej kocky, teda vyrezávaná kocka má 1 stenu spoločnú s povrchom pôvodnej kocky a 5 stien vo vnútri pôvodnej kocky. Pri vyrezávaní jedna stena ubudne, päť sa objaví, takže povrch sa zväčší o 4 steny vyrezávanej kocky pri každej vyrezanej kocke. Tých je dokopy 6 (keďže kocka má 6 stien), takže plocha konečného útvaru je $\boldsymbol{S_3} = S_2 + (6*4*6^2) = 60864 + 864 =$ **61728mm^2**.

Bodovanie:
povrch pôvodnej kocky – 0,5b.;
povrch po každom ďalšom kroku – po 1,5b.;
(z toho 0,5b. za hodnotu a 1b. za odôvodnenie)

Pikomat bol podporovaný Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy č. LPP-0007-06.

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

podporuje odborný rast organizátorov seminára