Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

29. ročník www.pikomat.sk školský rok 2011/2012

Vzorové riešenia 2. série zimnej časti, kategória 7-9

Príklad S1: Kto nemá v hlave, má v nohách. *Opravoval Samuel Cibulka.*

Väčšina z vás sa dostala k správnemu výsledku, niektorí však nie celkom správnym postupom. Poďme si ukázať asi najjednoduchší postup a tiež najčastejšie chyby.

Zadanie hovorí, že keď Tom vybehne 8 schodov, celá cesta mu trvá 30 sekúnd. A keď vybehne 13 schodov, trvá mu to 22,5 sekundy. Všetci ste odčítali 13-8=5 a 30-22,5=7,5 a tieto rozdiely navzájom vydelili: 7,5/5=1,5. Ale prečo? A čo ste tým vlastne vypočítali?

Vieme, že keď Tom vybehne 5 schodov navyše, ušetrí 7,5 sekundy. Teda za každý jeden vybehnutý schod ušetrí 1,5 sekundy. Alebo, to isté povedané trochu inak (ale tiež správne): ak by Tom tých 5 schodov **nevybehol**, musel by **čakať**, kým ho tú vzdialenosť vyvezú pohyblivé schody, a tým čakaním by stratil 7,5 sekundy. Takže pohyblivým schodom trvá prekonať výšku jedného schodu 1,5 sekundy. Ak ste to mali vo svojom riešení sformulované jedným z týchto dvoch spôsobov, boli ste na polceste k plnému počtu bodov.

Niektorí z vás však napísali, že vybehnutie jedného schodu Tomovi trvalo 1,5 sekundy. To, žiaľ, pravda nie je. Nevieme povedať, koľko mu trvalo vybehnutie jedného schodu. Jeden mohol zdolať za sekundu, ďalší za dve, alebo ich mohol pokojne aj všetkých 13 vyskočiť jediným skokom a potom už len stáť a nechať sa viezť. To pre nás ale ani nie je dôležité. My nepotrebujeme vedieť, čo **presne** sa dialo na schodoch v priebehu tých 22,5 či 30 sekúnd. Nám stačí, že poznáme **celkový** počet vybehnutých schodov a **celkový** ušetrený čas.

Aby sme zistili trvanie cesty, keď sa človek iba vezie, treba sa už len pozrieť na jeden z dvoch prípadov zo zadania (v rámci kontroly môžeme aj na oba). Pri vybehnutí 8 schodov Tomovi cesta trvá 30 sekúnd. Keby ich nevybehol, musel by počkať, kým to za neho spravia schody, a tým by to trvalo 8·1,5 = 12 sekúnd. O toľko by sa predĺžila pôvodná dĺžka cesty, takže celkový čas by bol 30+12 = **42 sekúnd**. Kontrola: pri vybehnutí 13 schodov Tom ušetril 13·1,5 = 19,5 sekundy. Po pripočítaní k pôvodnej dĺžke cesty opäť dostávame 22,5+19,5 = **42 sekúnd**.

Bodovanie:

správny výsledok aj postup – 5b.;

drobné chyby pri výpočte – 4,5b.;

správny výsledok, ale nesprávny alebo nedostatočne popísaný postup – 3 až 4b.;

pri zlom výsledku za rozumné nápady a úvahy – 0 až 3b.

Príklad S2: Heslo. *Opravovala Veronika „Nika" Jankovičová.*

Zo zadania vieme, že heslo je menšie ako 1000 a že pri každej otázke je práve jedna správna možnosť – to je veľmi dôležité! Najprv sa pozrime, čo by sme vedeli určiť, keby sme sa na každú otázku pozerali samostatne.

Bod 1: Ak by bolo heslo menšie ako 100 – možnosť (a), bolo by aj menšie ako 900 – možnosť (b). Dve správne odpovede byť nesmú, takže (a) môžeme škrtnúť. **Heslo je väčšie alebo rovné 100**.

Bod 2: Ak by bol ciferný súčet hesla väčší ako 20 alebo 30 – možnosti (b) a (c), bol by aj väčší ako 10 – možnosť (a). Takže škrtáme (b) aj (c), ostáva iba (a): **ciferný súčet hesla je väčší ako 10, ale menší alebo rovný 20**.

Ďalšie otázky nám samostatne už nič neprezradia, musíme sa pozrieť na niektoré skutočnosti, ktoré vieme spojiť.

Body 4 a 3: Ak by bolo posledné dvojčíslie hesla deliteľné 20 – možnosť 4(b), heslo by bolo deliteľné aj 2 aj 5 – možnosti 3(a) a 3(c). Takže škrtáme 4(b), ostáva iba 4(a): **po vyškrtnutí prvej cifry je zvyšok hesla deliteľný 19**.

Body 6 a 3: Ak by bolo heslo deliteľné 15 – možnosť 6(a), bolo by deliteľné aj 3 aj 5 – možnosti 3(b) a 3(c). Takže škrtáme 6(a), ostáva: **heslo je deliteľné 17 alebo 19**.

Keďže už vieme, že po škrtnutí prvej cifry je zvyšok hesla deliteľný 19, **musí koncové dvojčíslie byť 19, 38, 57, 76 alebo 95**. Kvôli usporiadaniu cifier v hesle (bod 5) by k 19 mohlo patriť iba heslo 119, to ale nespĺňa bod 7, no a k 95 by muselo patriť heslo 995, ktoré má zas priveľký ciferný súčet. Takže 19 a 95 ako možné koncové dvojčíslia škrtáme. Teraz sa bližšie pozrime na zostávajúce dvojčíslia.

Koncové dvojčíslie 38: kvôli usporiadaniu cifier (bod 5) tu môže byť iba 138, 238, 338, z toho kvôli bodu 7 jedine 338. To ale nie je deliteľné ani 17, ani 19.

Koncové dvojčíslie 57: opät kvôli bodom 5 a 7 ostávajú: 257, 357, 457, 557. Kvôli deleniu 17 a 19 ostáva iba **357**.

Koncové dvojčíslie 76: kvôli bodom 5 a 7 ostávajú 976 a 876, obe však majú privysoký ciferný súčet.

Vylučovacou metódou sme sa teda dopracovali k jedinému číslu. **Heslo je 357 a nemusíme ho poznať dopredu, aby sme truhle vedeli správne odpovedať na všetky otázky**. Odpovede na jednotlivé otázky sú: 1(b), 2(a), 3(b), 4(a), 5(a), 6(b), 7(c).

Poznámka:

Toto platí len vtedy, ak poznáme všetky otázky aj s možnosťami naraz. Ak by sme sa otázky dozvedali postupne a mali na otvorenie truhly iba jeden pokus, museli by sme heslo poznať vopred.

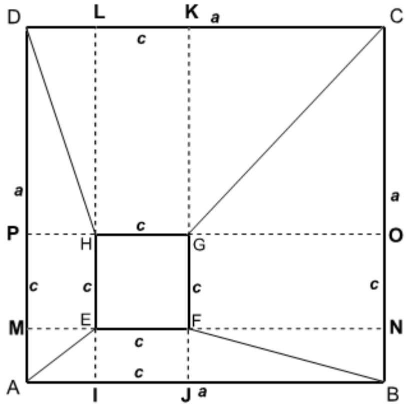
Bodovanie:

správne heslo a odpoveď na otázku, či ho treba poznať dopredu – 2b.;
vysvetlenie postupu (tabuľka s popisom alebo text, to bolo jedno) – 3b.

Príklad S3: Obrazec. *Opravovala Katarína „Ketrin“ Benešová.*

V prvom rade si bolo treba dať pozor na to, že menší štvorec EFGH vôbec nemusí byť presne v strede väčšieho štvorca ABCD, ale môže byť kdekoľvek v jeho vnútri. Potom sa príklad dal riešiť viacerými spôsobmi.

<u>**1.** Prvou možnosťou</u> bolo predĺžiť strany menšieho štvorca EFGH, a tým rozdeliť každý zo štyroch štvoruholníkov na obdĺžnik a dva trojuholníky (Obr. 1). Tým nám vznikli dva „cez seba prekrížené“ obdĺžniky IJKL a MNOP. Oba majú dĺžky strán a a c, takže majú aj rovnaký obsah $a \cdot c$ a sú zhodné. Keďže nás zaujíma iba plocha patriaca krajným štvoruholníkom, ešte od každého tohto obdĺžnika odčítame obsah menšieho štvorca EFGH, čiže $c \cdot c$. Teraz vidíme, že každej dvojici protiľahlých štvoruholníkov patrí rovnaká plocha, rovná $a \cdot c - c \cdot c$.



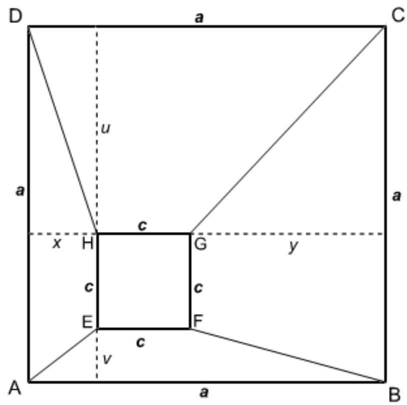
Obr. 1

Zvyšnú plochu, ktorú sme ešte nepreskúmali, tvoria 4 obdĺžniky, pričom každý z nich je uhlopriečkou rozdelený na 2 zhodné trojuholníky s rovnakým obsahom. V rámci každej tejto dvojice patrí jeden trojuholník do plochy štvoruholníkov ABFE a HGCD, druhý trojuholník do plochy štvoruholníkov AEHD a FBCG. Súčty ich obsahov teda ostávajú rovnaké.

<u>**2.** Pri druhej možnosti</u> si bolo treba všimnúť, že naše vzniknuté štvoruholníky sú lichobežníky – teda štvoruholníky, ktoré majú práve jednu dvojicu rovnobežných strán. Ďalej bolo treba poznať alebo si zistiť vzťah pre výpočet obsahu lichobežníka, ktorý znie:

$$S = \frac{(a+c) \cdot v}{2},$$

kde a a c sú dĺžky rovnobežných strán a v je výška lichobežníka, čiže kolmica spájajúca dve rovnobežné strany. V našom prípade platí, že $a = |AB| = |BC| = |CD| = |DA|$ a tiež že $c = |EF| = |FG| = |GH| = |HE|$, pretože ABCD a EFGH sú štvorce. Takže dĺžky a a c sú pre všetky 4 lichobežníky rovnaké. Jediné, čo spôsobuje, že ich obsahy sa môžu líšiť, je ich rôzna výška (keďže štvorec EFGH nemusí ležať presne v strede štvorca ABCD). Označme si preto výšky lichobežníkov postupne v, y, u, x (Obr. 2). My máme ukázať, že súčet obsahov ABFE a HGCD sa rovná súčtu



Obr. 2

obsahov AEHD a FBCG. Keď obsah každého lichobežníka zapíšeme pomocou vyššie uvedeného vzťahu, dostaneme rovnosť:

$$\frac{(a+c)\cdot v}{2}+\frac{(a+c)\cdot u}{2}=\frac{(a+c)\cdot x}{2}+\frac{(a+c)\cdot y}{2}$$

Tú si veľmi ľahko zjednodušíme tým, že obe strany rovnice vynásobíme dvoma a vydelíme číslom (a+c). Teraz už potrebujeme dokázať iba jednoduchú rovnosť ***v+u = x+y***.

(***v+u***) a (***x+y***) sú súčty výšok dvoch protiľahlých lichobežníkov. Najdôležitejšou myšlienkou tohto riešenia bolo uvedomiť si, že oba súčty (***v+u***) aj (***x+y***) sa rovnajú (***a-c***), čiže rozdielu strany štvorca ABCD a strany štvorca EFGH (Obr. 2). To isté sa dá vyjadriť aj ako ***v+c+u* = a** a ***x+c+y*** = ***a*** (po odčítaní ***c*** z oboch strán oboch rovníc dostaneme opäť *v+u=a-c, x+y=a-c*). Takže z oboch myšlienok vyplýva: ***v+u = a-c = x+y**, čiže skutočne platí **v+u = x+y*** a tým pádom platí aj rovnosť súčtov obsahov našich dvojíc lichobežníkov. Keďže rozmery štvorcov ABCD a EFGH sa posúvaním štvorca EFGH nemenia, bude to platiť, nech by bol štvorec EFGH kdekoľvek (ale stále vnútri štvorca ABCD).

3. Treťou možnosťou bolo dokázať, že to platí pre prípad, keď je štvorec EFGH v strede štvorca ABCD, a potom dokázať, že posúvaním štvorca EFGH sa súčet daných obsahov nemení. To sa dalo podobne ako v možnsti dva: ukázať, že súčet výšok dvoch protiľahlých lichobežníkov sa nemení, alebo že o koľko zväčšíme jednu výšku, o toľko sa zmenší príslušná druhá.

Bodovanie:

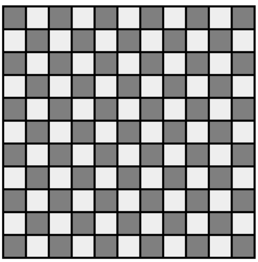
za menšie chyby som strhávala 0,5 až 1b.;

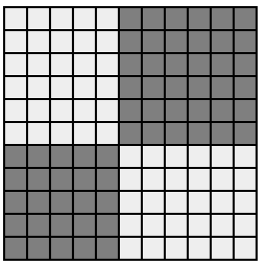
za nedostatočné vysvetlenie a nedotiahnuté myšlienky ste mohli stratiť 2 až 3b.;

ak ste príklad vyriešili len pre jeden konkrétny prípad (napríklad, že štvorec EFGH sa nachádza presne v strede štvorca ABCD, alebo ste dosadili konkrétne rozmery), mohli ste získať najviac 1,5b.

Príklad S4: Plániky. *Opravoval Milan Smolík.*

Najprv sa pozrime na štvorčekový plánik, pretože je jednoduchší. Tu väčšina z vás prišla na to, že **remíza môže nastať** a ukázali ste to spravidla tým, že ste plánik vyfarbili do šachovnice (Obr. 1) alebo na ňom vytvorili dva veľké štvorce a dva veľké obdĺžniky stretávajúce sa v jednom bode (Obr. 2).

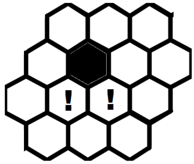

Obr. 1


Obr. 2

Avšak tvrdenie, že šachovnicové vyfarbenie sa dá použiť aj na šesťuholníkovom plániku, už správne nie je. Poďme sa na to pozrieť.

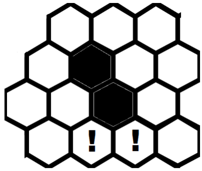
Na <u>šesťuholníkovom plániku</u>, ako ste si mnohí všimli, už **remíza nastať nemôže**. Je to tak preto, lebo jeden hráč nemôže úplne odrezať toho druhého (znemožniť mu výhru) bez toho, aby pritom sám nespojil svoje dve strany. Zatiaľ je to však iba tvrdenie a tým, ktorí sa tu zastavili, som nemohol dať plný počet bodov, pretože tvrdenie treba aj dokázať.

Pre potreby čierno-bielej tlače si hráčov pomenujeme „Čierny“ a „Šedý“. Ďalej si treba uvedomiť, že na poradí vyfarbovania šesťuholníkov v podstate nezáleží, keďže nás zaujíma až koncový stav hracej plochy, nie samotný priebeh hry.



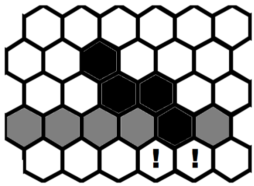
Obr. 3

Povedzme, že Čierny hráč má za úlohu spojiť hornú stranu s dolnou. Poďme teraz preskúmať, čo sa bude diať, keď sa bude Čierny snažiť od nejakého svojho políčka (kdekoľvek v plániku) prepracovať smerom dolu (rovnako by sme samozrejme mohli skúmať jeho postup smerom hore alebo postup Šedého doprava či doľava – bolo by to to isté, len otočené).



Obr. 4

Ak na Obr. 3 políčka označené výkričníkmi nevyplní obe Šedý hráč, vyplní jedno z nich Čierny a celá situácia sa opakuje, iba s tým rozdielom, že Čierny je o jedno políčko bližšie k svojej výhre (Obr. 4). Takže skôr či neskôr sa mu Šedý bude musieť postaviť do cesty. Kým však Šedý túto svoju bariéru nenatiahne na celú šírku plánika, vždy v nej ostane nejaká diera, ktorou Čierny dokáže prejsť a znovu sa nám zopakuje situácia zo začiatku (Obr. 5).



Obr. 5

Toto platí pre úplne každú dieru, ktorá sa objaví v šedej bariére: buď ju Šedý vyplní, alebo cez ňu Čierny prejde a opakuje sa počiatočná situácia odznova. Takto bude Čierny postupovať, až kým nespojí svoje dve strany alebo ho Šedý nezastaví úplnou bariérou bez dier. Ak však neexistuje v bariére žiadna diera, znamená to spojitú líniu z jednej strany plánika až po druhú, čo znamená víťazstvo Šedého. Takže jeden z hráčov musí vyhrať.

<u>Poznámka</u>:

Rozdiel medzi štvorčekovým a šesťuholníkovým plánikom je práve v tejto „úplnej bariére bez dier“. Vďaka tomu, že štvorčeky sa môžu dotýkať aj rohom, je možné z nich postaviť úplnú bariéru, ktorá pritom netvorí spojitú líniu (ako napríklad tmavá diagonála v Obr. 1 aj Obr. 2). Pri šesťuholníkoch existuje iba dotyk stranou, a preto postavenie spojitej bariéry nevyhnutne znamená výhru daného hráča.

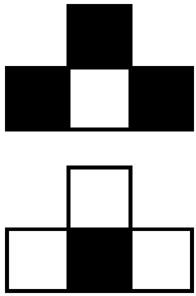
<u>Bodovanie</u>:

tvrdenie, že remíza je možná na štvorčekovom plániku – 0,5b.;
nakreslenie remízy na štvorčekovom plániku – 1b.;
tvrdenie, že zablokovanie druhého hráča je totožné s výhrou prvého – 1,5b.;
dôkaz – 2b.;
za nepopísané myšlienkové skoky alebo inak neúplný dôkaz som strhával 0,5 až 1,5b.

Príklad S5: Dlažba. *Opravoval Peter „Comp“ Ambrož.*

Keď chceš ukázať, že to ide, stačí nakresliť také rozloženie dlaždíc. Keď chceš ukázať, že to nejde, musíš nakresliť alebo slovne rozobrať všetky možnosti ukladania. Kto si toto uvedomí, môže tento príklad vyriešiť ozaj systematickým rozborom všetkých možností pri ukladaní a zistiť, že to v žiadnom prípade nejde. A je to správne. Alebo na to hodí trošku viac matematiky a uvedomí si nasledovnú vec:

Chodník má rozmery 10×10, čiže 100 políčok. Jedna dlaždica zaberá 4 políčka. To nám jasne určuje, že musíme použiť 25 dlaždíc. Tu to mnohí z vás ukončili s tým, že to pôjde. Chyba. Na tvare dlaždíc záleží tiež. Predstavme si teraz na chvíľu, že by to predsa len šlo vydláždiť, a výsledok by sme zafarbili ako šachovnicu – na striedačku čiernou a bielou farbou. Dostali by sme takú väčšiu šachovnicu 10×10. To by znamenalo, že každá použitá dlaždica je zafarbená jedným z dvoch spôsobov: jeden typ má 1 čierne a 3 biele políčka, druhý typ má 1 biele a 3 čierne políčka (vidno to aj na obrázku). Iných typov niet. Celá plocha pozostáva z 50 čiernych a 50 bielych políčok. Aby sme tieto rovnaké počty dosiahli, museli sme na vydláždenie použiť rovnaké počty jednotlivých typov dlaždíc – aby bol počet políčok každej farby vyvážený. A tu sa dostávame k problému, lebo máme presne 25 dlaždíc (nepárny počet), takže ich nemožno rozdeliť na 2 typy tak, aby z každého bol rovnaký počet. Výsledkom tohto problému je odpoveď na celé zadanie: **Plochu na chodníku takto vyplniť nevieme**.



Bodovanie:

vyššie uvedená úvaha alebo systematické rozobratie všetkých možností a zistenie, že to nejde – 5b.;
zabudnutie niektorej možnosti, ale naďalej prehľadný postup – 4,8 až 4b.;
menej a menej prehľadné postupy, viac zabudnutých možností – postupne až do 1,5b.;
kto zrátal správne, že treba 25 dlaždíc a tvrdil, že to ide – 1b.

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

AGENTÚRA NA PODPORU VÝSKUMU A VÝVOJA

Pikomat je podporovaný Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy číslo LPP-0375-09.