Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

29. ročník www.pikomat.sk školský rok 2011/2012

Vzorové riešenia 3. série zimnej časti, kategória 7-9

Príklad S1: Hra. *Opravoval Martin „Panda“ Svetlík.*

Najprv si ukážeme trochu kratšie a stručnejšie riešenie, ktoré však bolo treba takpovediac „vidieť od začiatku“. **Mačka pôjde prvá a Tom druhý. Ak mačka vynásobí číslo dvojkou, Tom vynásobí päťkou; ak mačka vynásobí trojkou, Tom tiež trojkou; a ak mačka päťkou, Tom dvojkou.** Takto Tom dosiahne, že po každej dvojici ťahov sa číslo zväčší buď 10-násobne (2·5 alebo 5·2), alebo 9-násobne (3·3). Preto po 4 takýchto dvojiciach ťahov môže byť číslo na podstavci najviac 1·10·10·10·10=10000 a najmenej 1·9·9·9·9=6561. Pritom 10000 ešte nie je prehra – prehrá až ten, po koho ťahu bude číslo <u>väčšie</u> ako 10000. A keďže na ťahu je teraz mačka, tak aj keby na podstavci bolo najmenšie možné číslo (6561) a ona ho vynásobila najmenšou možnosťou (dvojkou), určite prehrá.

Pre tých, ktorí sa pustili do postupného skúmania príkladu, bolo najlepšie začať od konca. Ak je ku koncu hry na podstavci číslo medzi 5001-10000, tak ten, čo je na ťahu, prehrá. Tom teda musí zabezpečiť, aby po jeho poslednom ťahu bolo na podstavci práve niektoré z týchto čísel (5001-10000). Aby to mohol dosianuť, musí pred jeho ťahom byť na podstavci číslo medzi 1001-5000. Ak je to číslo medzi 1001-2000, vynásobí ho piatimi, ak je to číslo medzi 1667-3333, vynásobí ho tromi, ak je to číslo medzi 2501-5000, vynásobí ho dvomi. Ako vidíme, v niektorých prípadoch má dokonca dve možnosti, no dôležité je, aby pre každé z čísel mal <u>aspoň jeden</u> spôsob, ako z neho spraviť číslo z rozsahu 5001-10000. Keby bolo pred jeho ťahom na podstavci číslo 1000, vedel by z neho spraviť najviac 5000, a to by nestačilo (mačka by 5000 vynásobila 2, vzniklo by 10000 a Tom by v ďalšom ťahu prehral).

Teda po ťahu mačky musí byť na podstavci číslo 1001-5000. Preto musí byť pred jej ťahom na podstavci číslo 501-1000 (500 nestačí, z toho by spravila 1000 a dostala by Toma do prehrávajúcej pozície).

Takto postupujeme ďalej – ak má byť po Tomovom ťahu na podstavci 501-1000, tak pred jeho ťahom tam musí byť 101-500. Týchto 101-500 musí byť po ťahu mačky, a tak pred jej ťahom musí byť číslo medzi 51-100. Takéto číslo musí vzniknúť Tomovým ťahom, a tak pred jeho ťahom musí byť číslo 11-50. Toto vzikne ťahom mačky, takže pred jej ťahom musí byť 6-10. To vznikne ťahom Toma, takže pred jeho ťahom musí byť 2-5. A presne v tomto rozsahu sú všetky čísla, ktoré vzniknú prvým ťahom. Preto **Tom musí nechať mačku, aby spravila tento prvý ťah. Potom bude Tom ťahať tak, aby po jeho**

ťahu bolo na podstavci vždy číslo z rozmedzia 6-10, 51-100, 501-1000, 5001-10000. Keď sa podrobnejšie pozrieme na riešenie z prvého odseku, zistíme, že tiež spĺňa tieto podmienky. Ak bude Tom hrať takto, mačka určite prehrá.

Poznámka:

Všimnite si, že pri Tomovom ťahu nám stačí, aby sa vedel aspoň jedným spôsobom dostať na číslo, z ktorého mačka prehrá, zatiaľ čo pri ťahu mačky musia všetky jej možné ťahy viesť do situácie, z ktorej Tom vyhrá (lebo keby niektorý do takej situácie neviedol, mačka by zahrala ten).

Bodovanie:

určenie začínajúceho hráča a popis stratégie – 2,5b. (to je to, čo je zvýraznené tučným písmom – bolo jedno, ktorý spôsob ste použili);

vysvetlenie – 2,5b.

Príklad S2: Čísla dverí. *Opravoval Peter „Comp" Ambrož.*

7-ciferný palindróm si zapíšeme ako ABCDCBA. Po vyškrtnutí prostrednej cifry nám teda vznikne 6-ciferné číslo ABCCBA. Vieme, že ABCCBA + 2844000 = ABCDCBA. Ako zistíme cifry A, B, C, D? Najjednoduchšie bude zapísať si súčet pod seba aj s výsledkom a na základe niekoľkých úvah ich dopočítať.

$$\begin{array}{ccccccc} & A & B & C & C & B & A \\ 2 & 8 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline A & B & C & D & C & B & A \end{array}$$

Pri sčítaní dvoch čísel pod sebou sa občas stane, že výsledok je viac ako 9 (ale nikdy nie viac ako 19). V takých prípadoch sa prenáša 1-ka do vyššieho rádu (o 1 miesto vľavo). Na tento prenos je treba myslieť aj v našich úvahách.

Poďme na to, začneme netradične z ľava. **A** vznikne sčítaním „2+nič", takže **A** je minimálne 2. Potom však v druhom stĺpci dostaneme minimálne 2+8=10, čiže prenášame +1 doľava. Preto je **A=3**. Všade nahradíme **A** trojkou a počítame ďalej.

V druhom stĺpci stojí: 3+8 je 11. Preto **B** môže byť 1 alebo 2 – dva vtedy, keď by došlo ku prenosu z tretieho stĺpca. Rýchlo však zistíme, že ku prenosu nedôjde, lebo **B** je malé a v súčte so 4 sa nedostaneme cez 10. Takže definitívne ostáva **B=1** a všade si to doplníme.

V treťom stĺpci je teraz 1+4. Takže **C** môže byť 5 alebo 6 – opäť podľa toho, či máme prenos zo štvrtého stĺpca. V tomto prípade sú obe možnosti správne.

Ostáva nám dopočítať písmenko **D** pre oba prípady C=5 alebo C=6. V prípade C=5 máme v štvrtom stĺpci 5+4=9 (to súhlasí s tým, že doľava nič neprenášame a že C je 5), takže **D=9**. V prípade C=6 máme v štvrtom stĺpci 6+4=10 (to súhlasí s tým, že prenášame

+1 doľava a že C=6), takže **D=0**. O prenose z piateho stĺpca už teraz neuvažujeme, lebo je tam C+0, a to určite neprekročí 10.

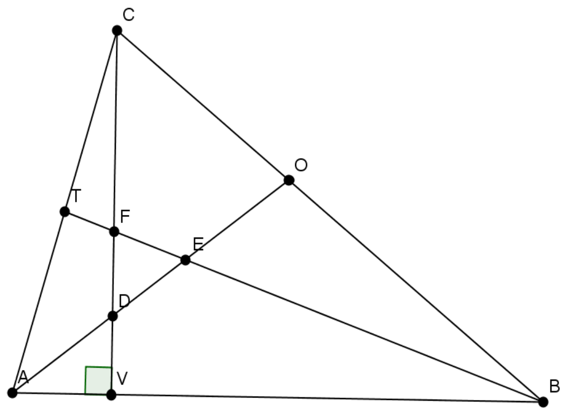
Nakoniec sme dostali **2 správne riešenia: 3159513 a 3160613**. Správnosť si môžeme overiť výpočtami: 3159513 – 315513 = 3160613 – 316613 = 2844000.

Pripomínam, že bolo treba nájsť všetky riešenia a nie zaspať na vavrínoch po nájdení prvého.

Bodovanie:

každé nájdené riešenie – 1b.;
poznatok, že A=2 alebo A=3 – 1b.;
objasnenie predošlého a zdôvodnenie, že A=3 – 1b.;
uvažovanie s prenosmi cez 10 aj pri ostatných písmenkách – 1b.;
bezhlavé skúšanie možností bez zjavného systému alebo len s náznakom úvah – 0-0,5b.

Príklad S3: Vyšívaný vankúšik. *Opravoval Augustin Žídek.*



Úlohu budeme dokazovat sporem. Vlastne mnozí z vás úlohu takto řešili, aniž by o tom věděli. Když něco dokazujeme sporem, předpokládáme, že neplatí to, co dokazujeme. Potom se dostaneme ke sporu a z toho plyne, že náš předpoklad byl chybný a tedy platí to, co dokazujeme.

Nechť tedy platí, že rovnostranný trojúhelník *DEF* může být sestrojen podle zadání. Z toho plyne, že všechny jeho vnitřní úhly budou mít 60° (to jsou úhly *DEF*, *DFE* a *EDF*). Z toho také plyne, že vrcholové úhly k těmto úhlům budou mít rovněž 60° (to jsou úhly *ADV*, *BEO* a *CFT*).

Podívejme se na úhel *ADV*, který má 60°. Úhel *DVA* je pravý, protože úsečka *CV* je výškou na stranu *AB*. Jelikož součet vnitřních úhlů v trojúhelníku musí být 180°, pak v trojúhelníku *ADV* musí úhel *DAV* mít velikost 180°-90°-60° = 30°. Protože úsečka *AO* je osou úhlu *BAC* a úhel *DAV* již známe (30°), musí mít stejnou velikost i úhel *CAO*. Tím pádem bude úhel *BAC* mít velikost 60°.

Nyní použijeme podobnou úvahu na dva další trojúhelníky. V trojúhelníku *BVF* známe úhly *VFB* = 60° a *FVB* = 90°. Z toho plyne, že úhel *ABT* má velikost 30°. V trojúhelníku *ABT* nyní známe úhly *BAC* = 60° a *ABT* = 30°. Z toho plyne, že úhel *ATB* je pravý.

Víme tedy, že úsečka *BT*, která je těžnicí, je zároveň i výškou na stranu *AC*. Z toho plyne, že trojúhelník *ABC* je rovnoramenný se základnou *AC*. Pro rovnoramenné trojúhelníky platí, že jejich ramena svírají se základnou stejný úhel. V našem případe jsou to úhly *CAB* a *ACB*, a tedy platí $|CAB| = |ACB| = 60°$. V trojúhelníku *ABC* tedy máme už dva úhly o velikosti 60°, z čeho nutne vyplývá, že i zbývající úhel (*ABC*) má 60°. Tedy trojúhelník *ABC* je rovnostranný.

A nyní přichází **spor**. Pokud je trojúhelník *ABC* rovnostranný, jsou jeho výška, těžnice i osa úhlu k dané straně totožné. Všechny tři těžnice/výšky/osy úhlů se protínají v jednom bodě (těžišti). Tím pádem body *D*, *E* a *F* splynou do jednoho bodu, což je v rozporu se zadáním a také nevznikne trojúhelník *DEF*, ale jen jeden bod. Naším postupem jsme ukázali, že kdyby byl trojúhelník *DEF* rovnostranný, musel by i trojúhelník *ABC* být rovnostranný, ale v takovém případě by trojúhelník *DEF* vůbec nemohl vzniknout = SPOR. Tímto jsme tedy dokázali, že trojúhelník *DEF* nikdy nemůže být rovnostranný.

Poznámka:

Ostroúhlý trojúhelník má všechny úhly menší než 90°.

Bodování:

správné odvození vnitřních úhlů a pozorování v rovnostranném trojúhelníku *ABC* – 5b.;
poznatek, že v rovnostranném trojúhelníku *ABC* se protnou výška, těžnice i osa úhlu v jednom bodě – 0,5b.;
správné odvození vnitřních úhlů, ale pak nesprávný závěr – 2b.;
jen vyzkoušení pár případů se závěrem, že trojúhelník *DEF* nemůže být rovnostranný – max 1b.;
za chybějící myšlenky jsem ztrhával 0,5-2b.

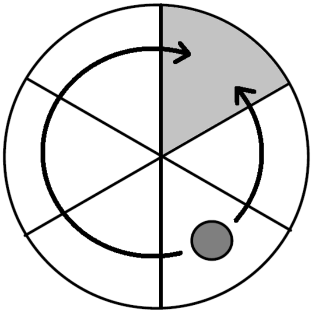
Príklad S4: Mince v kruhu. *Opravoval Pavol „Lietadlo“ Koprda.*

Niektorí pochopili príklad tak, že všetky mince majú skončiť vo výseku, v ktorom sa nachádzali na začiatku, čo, žiaľ, nebolo správne pochopenie.

Najprv si všimnime, že úvodné rozloženie mincí v kruhu je úplne symetrické, a tak nech by sme sa snažili dostať mince do ktoréhokoľvek výseku, postup bude vždy rovnaký (iba trochu otočený). Príklad teda pokojne môžeme riešiť len pre jeden konkrétny cieľový výsek – náš postup bude platiť rovnako pre všetky ostatné. V „matematickej reči“ sa na to používa fráza: *bez ujmy na všeobecnosti*.

Na úvod ešte jedno (možno) nové slovíčko: vlastnosť čísla, ktorá hovorí o tom, či je párne alebo nepárne, sa volá jeho *parita*. Vybrali sme si teda jeden konkrétny cieľový výsek. Ďalej väčšina z vás napísala, že z každého výseku sa vieme do toho cieľového dostať na buď iba párny, alebo iba nepárny počet krokov. Ako si tým však môžeme byť istí? Jednou možnosťou, ako sa o tom presvedčiť, je rozobrať všetky možné pohyby, aké sa s mincami dajú robiť. Nie je ich tak veľa.

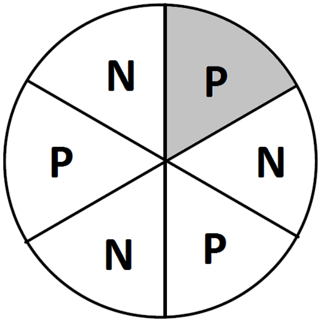
V prvom rade je to presun mince jedným alebo druhým smerom priamo do cieľového výseku (Obr. 1). Vidíme, že počet potrebných krokov je buď pre oba smery párny (ako na obrázku), alebo pre oba smery nepárny (ak by minca na obrázku začínala o jedno políčko vedľa). To je dôležité, pretože ak by napríklad náš kruh mal 7 (alebo akýkoľvek nepárny počet) výsekov, už by to neplatilo – presvedč sa sám/sama.



Obr. 1

Nesmieme tiež zabudnúť na posun mince o X výsekov tam a zase späť. Pozícia mince sa nezmení a celkový počet krokov sa zvýši o 2X, čiže o párne číslo. Avšak pripočítaním párneho čísla sa parita nemení, takže ani toto nám neprekáža. Posledný je posun kolom dokola – 6 krokov – opäť sa pozícia nezmení a pribudne párny počet krokov, takže ani toto nám paritu počtu potrebných krokov neovplyvní.

Pre každý výsek teda máme jednoznačne určené, či sa z neho do cieľa odstaneme na párny (P) alebo nepárny (N) počet krokov. Toto rozdelenie vidíme na Obr. 2. Ostáva už iba napísať, že keď spočítame tri párne a tri nepárne čísla, výsledok bude nepárny. Takže <u>všetky mince do jedného a toho istého výseku dostaneme jedine na nepárny počet krokov</u>. Keďže zadanie sa pýta na stav po 20 krokoch (párny počet), je jasné, že **mince nemôžu byť v jednom a tom istom výseku**.



Obr. 2

Obr. 2 nás privádza k jednému ešte jednoduchšiemu riešeniu. Predstavme si, že by sme si rozdelenie výsekov ako na Obr. 2 nakreslili hneď na začiatku (nemusíme nutne použiť písmená N a P, môžeme napríklad aj výseky zafarbiť striedavo dvoma farbami, je to jedno). Ďalej sa budeme – bez ujmy na všeobecnosti – sústrediť iba na mince vo výsekoch N. Na začiatku je ich počet nepárny (3). Z obrázku je jasné, že v jednom kroku vždy presunieme jednu mincu buď z N do P, alebo z P do N. V oboch prípadoch sa <u>počet mincí vo výsekoch N</u> zmení o 1 (či už zväčší alebo zmenší), a preto <u>sa zmení jeho parita</u>. Po 20 ťahoch sa jeho parita zmenila 20-krát, čo znamená, že musí byť zase rovnaká ako na začiatku – nepárna. Avšak ak majú všetky mince byť v jednom výseku, musí byť spolu vo všetkých N-výsekoch buď 6, alebo 0 mincí – párny počet. Opäť sa dostávame k záveru, že **po 20 ťahoch mince určite nebudú všetky v jednom a tom istom výseku**.

<u>**Bodovanie**</u>**:**

za nezrovnalosti v dôkaze som strhával max 2,5b.;

za drobné chyby 0,5b.

Príklad S5: Kúzelné čísla. *Opravovala Petra „Peťa“ Vlachynská.*

Kúzelné číslo sa po vynásobení svojím ciferným súčtom má desaťnásobne zväčšiť, takže jeho ciferný súčet musí byť 10. S týmto poznatkom sa k správnemu výsledku dalo dopracovať dvoma spôsobmi.

1. SPÔSOB: poďme sa najprv pozrieť, aké čísla pre nás vôbec pripadajú do úvahy. Nie je ťažké určiť, že najmenšie kúzelné číslo, aké existuje, je 19. Takže všetky tri hľadané čísla musia byť väčšie alebo rovné 19, a tým pádom aspoň 2-ciferné. Podobne si vieme určiť aj hornú hranicu. Ak by čo i len dve z nich boli 3-ciferné, ich vynásobením by vzniklo minimálne 6-ciferné číslo (pretože najmenšou možnosťou je $10\cdot100\cdot100=100000$). Náš súčin 71668 je však iba 5-ciferný, takže musí byť súčinom minimálne dvoch 2-ciferných a maximálne jedného 3-ciferného čísla.

Keď chceme zistiť, aké najväčšie môže byť 3-ciferné číslo, musia byť zvyšné dve 2-ciferné čísla čo najmenšie. V tomto prípade teda 19 a 19. Keď nimi potom vydelíme 71668, dostaneme 71668/19/19= približne 198,5. Najbližšie 3-ciferné kúzelné číslo menšie ako toto je 190, teda najvyššia možná hodnota kúzelného čísla vyhovujúceho zadaniu je 190.

Vypísaním všetkých kúzelných čísel od 19 po 190 (konkrétne: 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91, 109, 118, 127, 136, 145, 154, 163, 172, 181 a 190) a overením, či delia 71668, zistíme, že vyhovujú len čísla 19, 46 a 82. A keďže vynásobením týchto troch čísel získavame 71668, našli sme jediné riešenie úlohy: **hľadané kúzelné čísla sú 19, 46 a 82**.

2. SPÔSOB: rozložíme náš súčin na prvočinitele $71668 = 2 \cdot 2 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 41$. Týchto 5 čísel teraz potrebujeme rozdeliť do troch skupín tak, aby súčin v rámci každej skupiny bol kúzelné číslo. Keďže rozdeľujeme 5 čísel do 3 skupín, je jasné, že aspoň v jednej skupine bude iba jedno číslo. Tým pádom musí byť kúzelné už samo o sebe, a to je z našej ponuky jedine 19. Ostatné 4 už kúzelné nie sú, a tak nemôžu byť v skupine osamote, musíme z nich vytvoriť dve dvojice. Na to máme len dve možnosti: $2\cdot2$ a $19\cdot23$, čiže dvojica 4, 437, alebo $2\cdot23$ a $2\cdot41$, čiže dvojica 46, 82. Z týchto sú iba v druhom prípade obe čísla kúzelné. Riešenie sme teda vylučovaou metódou našli opäť len jedno, konkrétne sú to **kúzelné čísla 19, 46 a 82**.

Bodovanie:

správna odpoveď – 3b.; vysvetlenie postupu – 1,5b.; zdôvodnenie, prečo je nájdené riešenie to jediné správne – 0,5b.

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

AGENTÚRA NA PODPORU VÝSKUMU A VÝVOJA

Pikomat je podporovaný Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy číslo LPP-0375-09.