Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

29. ročník www.pikomat.sk školský rok 2011/2012

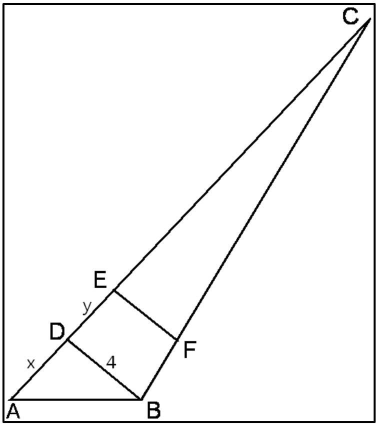
Vzorové riešenia 1. série letnej časti, kategória 7-9

Úloha S1: Pokreslený papier. *Opravovala Lenka „Lenika" Bendová.*

Trojuholník ABC zo zadania úlohy by mohol vyzerať asi tak, ako na obrázku. Keďže úsečky DB a EF sú rovnobežné, trojuholníky DBC a FEC sú podobné. Tým pádom platí:

$$\frac{|EF|}{|EC|} = \frac{|DB|}{|DC|}.$$

Zo zadania vieme, že $|DB| = 4$cm a tiež, že $|AD|:|DC| = 1:8$, a tak si môžeme označiť $|AD| = x$ a $|DC| = 8x$. Ak ešte označíme $|DE| = y$, potom bude $|EC| = 8x - y$. Toto keď dosadíme do prvého výrazu, dostaneme



$$\frac{|EF|}{8x-y} = \frac{4}{8x},$$

z čoho vylpýva

$$|EF| = \frac{8x-y}{2x}.$$

Keďže obsah trojuholníka EFC je polovicou obsahu trojuholníka ABC, platí:

$$|EC|\cdot|EF|\cdot 2 = |AC|\cdot|DB|,$$

čiže

$$(8x-y)\cdot|EF|\cdot 2 = 9x\cdot 4.$$

Po dosadení za $|EF|$ dostaneme:

$$(8x-y)\cdot\frac{8x-y}{2x}\cdot 2 = 36x$$

a po ďalšej úprave:

$$(8x-y)^2 = 36x^2,$$

z čoho vyplýva

$$8x - y = 6x,$$

a teda

$$y = 2x.$$

Po dosadení:

$$|EF| = \frac{8x-2x}{2x} = \frac{6x}{2x} = 3cm.$$

Toto je len jedno z možných riešení, ktoré sa však vyskytovalo najčastejšie.

Bodovanie: správne riešenie s úplným postupom – 5b.; správne riešenie s neúplným postupom – 3 až 4,5b.; pokus o riešenie, riešenie s chybami – 1 až 2,5b.

Úloha S2: Solitér. *Opravoval Pavol „Lietadlo“ Koprda.*

Na úvod jedno (možno) nové slovíčko: vlastnosť čísla, ktorá hovorí o tom, či je párne alebo nepárne, sa volá jeho *parita*. V tejto úlohe treba mať na pamäti, že keď od ľubovoľného čísla odčítame alebo k nemu pričítame jednotku, jeho parita sa zmení.

Na začiatku má slečna Elisabeth na troch kôpkach 11, 12 a 13 guľôčok. V každom ťahu z dvoch kôpok po jednej guľôčke vezme a na zvyšnú kôpku jednu guľôčku pridá. Z toho vyplývajú dve dôležité veci:

1. celkový počet guľôčok sa každým ťahom zníži o jedna;
2. z pravidla o parite vyplýva, že <u>v každom ťahu sa parita každej kôpky zmení</u>!

Keďže na začiatku má slečna 11+12+13=36 guľôčok a na konci jej zostane iba jedna, musí urobiť 35 ťahov. To znamená 35-krát zmenu parity pre každú kôpku. Nie je ťažké si uvedomiť, že keď nejakému číslu 35-krát zmeníme paritu, bude presne opačná, ako bola na začiatku. Takže keď mali kôpky na začiatku parity **nepárna--párna--nepárna** (11--12--13), po 35 ťahoch musia určite mať parity **párna--nepárna--párna**.

Keďže slečne Soyersovej na konci ostala jediná guľôčka, je jasné, že musela byť na prostrednej – nepárnej – kôpke (zvyšné dve kôpky obsahovali nula guličiek – párny počet). Preto **guľôčka, ktorá pani Soyersovej ostala, musela byť červená.**

Bodovanie: správna farba – 1,5b.; uvedomenie si, že parita v každej kôpke sa mení v každom ťahu – 1b.; zistenie, že musíme spraviť 35 ťahov – 1b.; zvyšok bodov za dokončenie úvahy, prečo je posledná guľôčka červená.

Úloha S3: Prášky na spanie. *Opravoval Milan „Jimi“ Smolík.*

I keď sa správne riešenie tejto úlohy dalo pri troche skúšania aj takpovediac „uhádnuť“, my si povieme niekoľko logických úvah, ktoré nás k riešeniu privedú naisto. Lieky budeme označovať podľa prvého písmena ich názvu.

V prvom rade bude pre nás výhodné lieky si zadeliť trochu inak. Čakaciu dobu medzi dvoma užitiami toho istého lieku nebudeme merať v minútach, ale v počte iných liekov, ktorými musíme čakaciu dobu prekryť. *Napríklad:* pre liek A je čakacia doba 360 minút. Keď ho užijeme, prvých 90 minút prespíme ešte vďaka lieku A, no na zvyšných 270 minút budeme potrebovať 270/90 = 3 iné užitia lieku.

Takýmto spôsobom si vieme lieky rozdeliť na dve skupiny:

1. **dlhodobé lieky E, D, Z** – na prekrytie ich čakacej doby potrebujeme **5** iných liekov;
2. **krátkodobé lieky A, C** – na prekrytie ich čakacej doby potrebujeme **3** iné lieky.

Teraz skúsme vytvoriť nejaký plán pre pána Conana. Začnime dlhodobým liekom, napríklad Z. Po ňom je treba užiť 5 iných liekov, čo si zaznačíme takto:

Z _ _ _ _ _ **Z** ...

K dispozícii máme však iba 4 iné druhy. Takže jeden z nich bude treba užiť dvakrát. Do tohto krátkeho rozmedzia sa dvakrát zmestí jedine krátkodobý liek, ak ho užijeme „na krajoch“, takto:

Z **A** _ _ _ **A** Z ...

Už z tohto môžeme vyvodiť jednoduché pravidlo: <u>po každom užití dlhodobého lieku musí nasledovať užitie krátkodobého lieku</u> (pretože je to jediná možnosť, ako vyplniť 5-liekovú čakaciu dobu dlhodobého lieku). Tým pádom po druhom Z musí nutne nasledovať krátkodobý liek a musí to byť C, pretože na A je ešte priskoro. Takto:

Z A _ _ _ A Z **C** ...

Aby bol liek C využitý čo najefektívnejšie, dáme ho aj sem:

Z A _ **C** _ A Z C ...

Zvyšné dve medzery musíme vyplniť liekmi E a D, napríklad takto:

Z A **E** C **D** A Z C ...

Ďalej stačí pokračovať tak, že užijeme vždy ten liek, ktorému práve skončila čakacia doba. Výsledný reťazec bude teda vyzerať takto:

Z A E C D A Z C E A D C , Z A E C D A Z C E A D C ...

Bystré oči si isto všimli, že po čiarke sa postupnosť opakuje. To znamená, že kým sa pán Conan bude držať tejto postupnosti, môže spať, koľko sa mu len chce.

<u>Bodovanie</u>: vynechané časti postupu – mínus 0,3 až 0,5b.; drobné nepresnosti a nedokončené riešenia – mínus do 1b.; podľa počtu správnych myšlienok – do 3b.

<u>Úloha S4: Kocky vo výklade.</u> *<u>Opravoval Peter „Comp“ Ambrož</u>.*

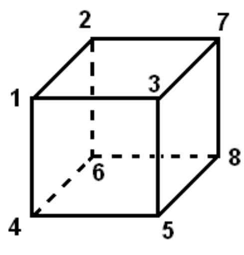
Najprv sa zamyslíme, aké prvočísla vôbec môžu vzniknúť v stredoch stien. Najmenší možný súčet je 1+2+3+4 = 10, najväčší zas 8+7+6+5 = 26. V rozsahu od 10 do 26 máme len tieto prvočísla: 11, 13, 17, 19, 23. Pozornému oku riešiteľa neujde fakt, že ich je len 5, ale stien na kocke je 6. Preto nedokážeme splniť želanie pre pravú náušnicu, aby boli jednotlivé súčty rôzne. Takáto náušnica sa nedá zostrojiť.

Úloha tu však nekončí, treba vymyslieť aspoň tú ľavú náušnicu. Všimneme si, že súčet čísel od 1 do 8 je 36. Toľko musí byť aj súčet čísel na každej dvojici protiľahlých stien. Spomedzi našich 5 prvočísel si preto musíme vybrať také dvojice, že ich súčet je 36, lebo len takto môžu tvoriť steny kocky. Tieto dvojice môžu byť 13+23 alebo 17+19. Inej dvojice niet. Číslo 11 nemá dvojicu, lebo do súčtu 36 mu chýba 25, čo ale nie je prvočíslo. Preto s 11-kou ďalej nepočítame.

Teraz už vieme, že kocka bude mať na stenách niektoré z čísel 13, 17, 19, 23. Navyše 13 a 23 budú ležať vždy oproti sebe a 17 a 19 budú ležať vždy oproti sebe. V tomto momente si môžeme vypísať všetky možnosti, ako sa z čísel vo vrcholoch dajú vytvoriť jednotlivé prvočísla, a potom z toho vyrobiť niekoľko kociek. Možnosti sú zhrnuté v tabuľke.

13	**23**	**17**	**19**
1+2+3+7	4+5+6+8	1+2+6+8	3+4+5+7
1+2+4+6	3+5+7+8	1+3+5+8	2+4+6+7
1+3+4+5	2+6+7+8	1+3+6+7	2+4+5+8
		1+4+5+7	2+3+6+8
		2+3+4+8	1+5+6+7
		2+3+5+7	1+4+6+8
		2+4+5+6	1+3+7+8

Z tabuľky si teraz vyberáme možnosti a konštruujeme rôzne kocky. Hlavne si treba dať pozor, aby všetky steny boli tvorené niektorou možnosťou z tabuľky. Jednu z viacerých správnych možností uvádzam na obrázku. V tomto prípade sme nevyžadovali úplné vypísanie všetkých možností, keďže ich je pomerne veľa. Menovite zo 40320 spôsobov, ako očíslovať kocku, je 1200 správnych (spĺňa zadanie), z toho 50 unikátnych



riešení (ostatné sa dajú získať otáčaním kocky).

Bodovanie: správne určenie prvočísel, ktoré môžu byť v stredoch stien – 2b. (to je kľúčová časť postupu pre obe náušnice); zistenie, že pravá sa nedá, lebo je málo prvočísel – 1b.; ďalší postup vedúci k ľavej náušnici (napríklad vypísanie možností súčtov, zistenie dvojíc prvočísel, rozmiestnenie párnych a nepárnych čísel na vrcholy, atď.) – 1,5b.; uvedenie konkrétnej ľavej náušnice – 0,5b.

Úloha S5: Trezor. *Opravoval Michal „Mickey“ Kopf.*

Zo všetkých 36 kľúčových dierok je 27 falošných, takže pravých dierok je 36 – 27 = 9. Tie sa vyskytujú v trojiciach (v tvare písmena „L“ – ďalej už iba „L-ko“), takže týchto trojíc bude 9/3 = 3.

My chceme vedieť, koľko najmenej pokusov je potrebných, aby sme určite trafili aspoň jednu pravú dierku. Po (dlhšej či kratšej) chvíli skúšania nájdeme rozmiestnenie 14 pokusov, pri ktorom sme si istí, že vždy trafíme aspoň jednu pravú kľúčovú dierku (napríklad Obr. 1 alebo Obr. 2). Na obrázkoch jasne vidno, že na šachovnicu sa nedajú umiestniť 3 „L-ká“ tak, aby sme žiadne netrafili.

			X		X
		X		X	
	X		X		X
X		X		X	
	X		X		
X		X			

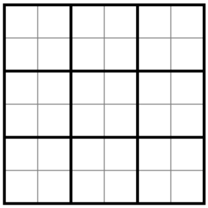
Obr. 1

	X		X		
	X		X	X	X
	X		X		
	X		X		
	X		X		
	X		X		

Obr. 2

Ukázali sme teda, že 14 pokusov stačí na to, aby sme si mohli byť istí, že trafíme aspoň jednu pravú kľúčovú dierku. Teraz znie otázka: nestačilo by nám aj 13 pokusov?

Tu si rozdelíme šachovnicu 6×6 na 9 malých štvorcov 2×2 (Obr. 3). Keď si chceme byť istí, že v jednom malom štvorci 2×2 nie je žiadne „L-ko“, musíme v ňom vyskúšať aspoň dve kľúčové dierky. Pretože keby sme vyskúšali iba jednu, zvyšné 3 ešte stále môžu tvoriť „L-ko“ (Obr. 4). Takže <u>na „preskúmanie“ jedného malého štvorca potrebujeme dva pokusy</u>.



Obr. 3

My nesmieme na Obr. 3 nechať nepreskúmané ani 3 malé štvorce (lebo by v nich mohli byť 3 „L-ká“, ktoré sa snažíme trafiť). Inak povedané: smieme nechať nepreskúmané maximálne 2 malé štvorce. To znamená, že musíme preskúmať aspoň 7 malých štvorcov. A z predchádzajúcej úvahy vieme, že je na to potrebných aspoň 7·2 = 14 pokusov. Tým sme ukázali, že 13 pokusov nestačí, a preto je naše riešenie so 14 pokusmi naozaj najlepšie.

	X

Obr. 4

Bodovanie: riešenie na 16, 15, alebo 14 pokusov – v danom poradí 1b., 2b., alebo 3b.; dokázanie, že 14 je naozaj najmenej – 2b.

P-MAT n.o.®

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

AGENTÚRA NA PODPORU VÝSKUMU A VÝVOJA

Pikomat je podporovaný Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy číslo LPP-0375-09.