Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

29. ročník www.pikomat.sk školský rok 2011/2012

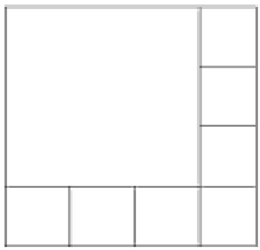
Vzorové riešenia 2. série letnej časti, kategória 7-9

Úloha S1: Záhony. *Opravoval Michal „Kesy“ Kesely.*

Prvým krokom k vyriešeniu úlohy bolo poriadne si prečítať zadanie. Pýtali sme sa na to, pre ktoré prirodzené čísla N sa štvorcová záhrada dala rozdeliť na N štvorcov, nie koľko takých rozdelení existuje. Preto odpoveď „nekonečno“ správna nebola.

Mnohí z vás začali skúšaním, čo zvykne byť dobrou metódou na odhalenie výsledku, avšak skúšanie samo o sebe neposkytuje dôkaz, že máme všetko správne. Takto väčšina z vás prišla na to, že **záhradu je možné rozdeliť na 1, 4, 6, 7, 8 a viac štvorcov a jediné nevhodné počty sú 2, 3 a 5**. (kam zaradiť počet štvorcov 1 je skôr filozofický ako matematický problém a pri bodovaní nezavážil)

V zadaní máme riešenie pre 4 a 6 štvorcov. Odtiaľ môžeme „ukradnúť“ jednoduchý princíp a nájdeme aj delenie na 8 štvorcov (Obr. 1). Princíp je nasledovný: jeden veľký štvorec v rohu a okolo neho niekoľko menších štvorcov. Ak na spodnej hrane takto umiestnime k štvorcov, tak celkový počet štvorcov bude $2k$. Úlohu teda vieme vyriešiť pre každé párne číslo väčšie ako 2.



Obr. 1

Ďalej si môžeme uvedomiť, že ktorýkoľvek existujúci štvorec sa dá ďalej deliť rovnako ako pôvodná záhrada. Čo sa stane s celkovým počtom štvorcov, keď jeden štvorec rozdelíme na štyri menšie? Z 1 sa stanú 4, takže celkový počet sa zvýši o 3. Preto ak vieme úlohu vyriešiť pre číslo n, vieme ju vyriešiť aj pre $n+3$. Jednoducho tak, že rozdelíme jeden existujúci štvorec.

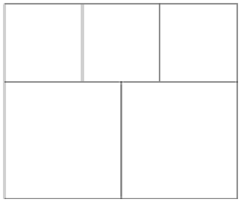
Úlohu už máme vyriešenú pre každé párne číslo väčšie ako 2. Z predošlého odseku preto vyplýva, že ju vieme vyriešiť aj pre každé párne číslo väčšie ako 2 plus tri ($2k + 3$), čo je každé nepárne číslo väčšie ako 5. Záhradu teda vieme rozdeliť na 1, 4, 6, 7 a všetky väčšie párne aj nepárne počty štvorcov.

Za kompletné riešenie potiaľto bolo možné získať 4,5b. Zvyšného 0,5b. prislúchalo dôkazu, prečo to na 2, 3 a 5 štvorcov nejde.

Pre 2 a 3 je argument rovnaký. Každý vrchol pôvodného štvorca musí patriť nejakému z menších štvorcov. No vrcholy sú 4 a štvorce len 2 alebo 3, a tak nejaký menší štvorec musí obsahovať 2 vrcholy pôvodnej záhrady. V takom prípade je ale tento „menší“ štvorec totožný s pôvodnou záhradou, čo znemožňuje delenie.

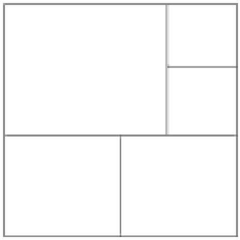
Pre 5 štvorcov je to už trošku zložitejšie. Opäť každý z rohov záhrady musí patriť nejakému štvorcu. Z predošlého odseku ale už vieme, že to musia byť 4 rôzne štvorce. Posledný, piaty, sa môže nachádzať buď niekde v strede, alebo byť prilepený na niektorý okraj pôvodnej záhrady. V každom prípade však existuje hrana záhrady (napríklad spodná), na ktorú sú prilepené práve 2 menšie štvorce (ten piaty sa predsa nemôže rozťahovať všade, tak predpokladajme, že sa nedotýka spodnej hrany).

Ak sú štvorce priľahlé k tejto strane rovnaké, ostatné tri musia byť niekde nad nimi, čo sa dá rozvrhnúť dvoma spôsobmi (Obr. 2 a Obr. 3).



Obr. 2

Keďže vieme, že záhrada má tvar štvorca, v oboch prípadoch vieme vyrátať rozmery jednotlivých záhonov a zistíme, že v takomto prípade nie sú štvorcami. Ak dĺžka strany záhrady je a, potom na Obr. 2 spodné štvorce majú dĺžku strany $a/2$. Horné štvorce by potom museli mať zboku dĺžku $a/2$, ale zhora dĺžku $a/3$. Podobne možno postupovať aj s Obr. 3 (skúste si to).



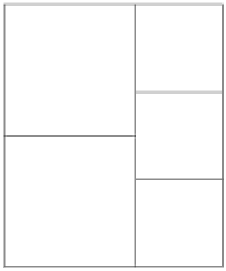
Obr. 3

No a ak sú štvorce priľahlé k dolnej hrane rôzne, zistíme, že jediný spôsob, ako záhradu vyplniť, je doplniť 2 menšie štvorce a 1 väčší ako na Obr. 4. To je však iba otočený Obr. 2, o ktorom sme už dokázali, že to nejde.

Matematicky dokázať takúto pomerne zjavnú vec je dosť obtiažne. Aj preto som za chýbajúcu rozpravu o 5 štvorcoch strhával len 0,1b.

Bodovanie:

riešenie pre všetky párne čísla – 1,5b.;
myšlienka o prechode od n ku $n+3$ – 1,5b.;
dôkaz, že pre 2, 3 a 5 to nejde – 0,5b.;
kvalita postupu – 1,5b.



Obr. 4

Úloha S2: Detektívny problém. *Opravoval Branislav „Hlubik“ Hlubocký.*

Dvaja detektívi sa snažia zistiť trojcifernú sumu. Marty vie, že jej ciferný súčet je 8. Ďalej vie, že jeho kolega James dokázal na základe ciferného súčinu zúžiť výber na iba 6 možností.

Ako prvé si Marty uvedomí, že suma neobsahuje nulu, pretože v takom prípade by ciferný súčin bol tiež nula a James by nemohol zúžiť výber na 6 možností. Takže pre súčet 8 mu ostávajú tieto trojice cifier: (1,1,6), (1,2,5), (1,3,4), (2,2,4) a (2,3,3). A z nich hneď aj vyplývajú ciferné súčiny, ktoré by mohol poznať James (v rovnakom poradí): 6, 10, 12, 16 alebo 18.

Každý z týchto ciferných súčinov si Marty rad radom preverí: vždy sa vžije do pozície Jamesa a predstaví si, že pozná IBA daný ciferný súčin. Potom skúsi nájsť všetky trojciferné čísla, ktoré taký ciferný súčin majú. Tých musí byť presne 6 – kvôli Jamesovej prvej vete. Takže Marty postupuje asi takto:

Súčin 6: môže byť z cifier (1,1,6) alebo (1,2,3) – z toho sa dá vytvoriť 9 trojciferných čísel.
Súčin 10: môže byť jedine z cifier (1,2,5) – z toho sa dá vytvoriť 6 trojciferných čísel.
Súčin 12: môže byť z cifier (1,2,6), (1,3,4)... Ďalšie ani nezisťujeme, pretože už z týchto trojíc sa dá vytvoriť priveľa (viac ako 6) trojciferných čísel.
Súčin 16: môže byť z cifier (1,2,8), (1,4,4)... A už nemusíme pokračovať.
Súčin 18: môže byť z cifier (1,2,9), (1,3,6)... A už nemusíme pokračovať.

6 možností sa vyskytlo v jedinom prípade, a tak Marty zistil, že číslo musí byť zložené z cifier 1, 2 a 5 (James to vedel už na začiatku podľa ciferného súčinu). Zatiaľ však nevedia, v akom sú poradí. Na to slúži posledná informácia, že druhá mocnina poslednej cifry <u>nedelí</u> celé číslo. To už ľahko overíme pre našich 6 možností 125, 152, 215, 251, 512 a 521:

$1^2 = 1$, takže delí všetky čísla;

$2^2 = 4$, čo delí aj 512 aj 152;

$5^2 = 25$, delí 125, ale nedelí 215.

Takže **suma, ktorú neznámy lupič ukradol, bola 215 libier.**

Bodovanie:

odôvodnené priamo v riešení.

Úloha S3: Vyhraj trezor. *Opravoval Peter „Comp“ Ambrož.*

Riešenie tohto problému pozostáva z dvoch častí. Najprv sa presvedčíme, že niekoľko prvých čísel v postupnosti nie je prvočíslami, ideálne preveríme aspoň prvých desať. O to ľahšie sa nám potom bude riešiť druhá časť problému, kde ukážeme, že ani žiadne ďalšie číslo v postupnosti nie je prvočíslom.

Prvá časť

98, 9876, 987654, 98765432, 9876543210 – sú deliteľné dvoma.

98765 – deliteľné piatimi.

9, 987, 9876543, 987654321 – deliteľné troma (pretože ciferný súčet je deliteľný troma).

Druhá časť

Všetky ďalšie čísla končiace na 0, 2, 4, 6 alebo 8 budú deliteľné dvoma. Všetky končiace na 0 alebo 5 budú deliteľné piatimi. Ostali nám čísla končiace na 1, 3, 7 alebo 9. Všetky budú mať na začiatku 9876543210 (pričom táto časť sa môže ľubovoľne veľakrát opakovať) a za tým bude nasledovať zakončenie v tvare 9, 987, 9876543 alebo 987654321. Všetky tieto zakončenia majú ciferný súčet deliteľný troma. Rovnako aj začiatočné časti majú ciferný súčet deliteľný troma. Ak teda v ľubovoľnom čísle z našej postupnosti, ktoré končí na 1, 3, 7 alebo 9, sčítame všetky cifry, výsledok bude deliteľný troma a teda aj samotné číslo bude deliteľné troma.

Týmto sme ukázali, že **každé číslo v postupnosti má aspoň jedného deliteľa iného než jeden alebo seba samého**, takže sa v nej nenachádza žiadne prvočíslo.

Bodovanie:

prvá časť – 2,5b.;

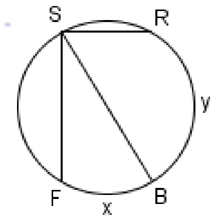
druhá časť – 2,5b.;

nedotiahnutý pokus o dokázanie druhej časti – 1,2 až 1,5b.;

iné strhnutia bodov za drobné chyby.

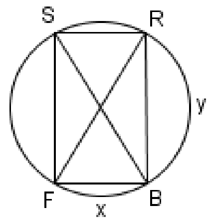
Úloha S4: Psi v jazere. *Opravoval Milan „Jimi“ Smolík.*

Na úvod si pre prehľadnosť situáciu môžeme znázorniť náčrtkom (Obr. 1). Štart označíme písmenom *S*, polohu jednotlivých psov po doplávaní prvými písmenami ich mien (*B*, *F* a *R*). Vzdialenosti po obvode jazera budú *x* a *y*, kde *x* je vzdialenosť medzi Filutom a Baskerom a *y* vzdialenosť medzi Baskerom a Randolphom. Úsečky *SF*, *SB* a *SR* potom označujú trasy, ktoré psi preplávali.



Obr. 1

Keďže Filuta plával na juh a Randolph na východ, plávali na seba kolmými smermi a z vody vyliezli presne oproti sebe, na koncových bodoch priemeru jazera – to je vidno napríklad na Obr. 2, keď doplníme niekoľko čiar a vytvoríme tak obdĺžnik. Preto keď bude Filuta bežať k Randolphovi (alebo naopak Randoplh k Filutovi), je jedno, ktorou stranou jazera pobeží, oboma smermi je vzdialenosť rovnaká: polovica obvodu jazera, $x + y$.



Obr. 2

Na to, aby sa po doplávaní psi dostali k Randolphovi, musel Basker prebehnúť trasu dĺžky y a Filuta trasu dĺžky $x + y$, čo je spolu $x + 2y$. Keby sa naopak psi stretávali pri Filutovi, Basker by prebehol x a Randolph $x + y$, takže spolu $2x + y$. Zo zadania vieme, že dĺžka druhej trasy by bola kratšia, čo vieme zapísať ako nerovnosť $2x + y < x + 2y$. Po jednoduchej úprave (od oboch strán odčítame x a y) získavame: $\boldsymbol{x < y}$. Všimnime si, že pre zostavenie tejto nerovnosti nie je podstatné, o koľko kratšia by bola druhá trasa od prvej.

To znamená, že po vyplávaní na breh bol Filuta k Baskerovi bližšie ako Randolph (takže náš náčrt zo začiatku bol správny – Obr. 1). Hoci intuitívne je možno už teraz zjavné, že **Basker preplával najväčšiu vzdialenosť a Randolph najmenšiu**, toto tvrdenie treba aj dokázať. Pre Baskera je to jednoduché: keďže plával cez stred jazera, plával po jeho priemere, a to je najdlhšia úsečka, ktorú môžeme nájsť vnútri kruhu, preto preplával určite najviac.

Ako to bude s Filutom a Randolphom? Čím bližšie na obvode jazera sa psi nachádzajú k miestu B, tým ďalej sú od štartu a tým viac museli preplávať, aby sa tam dostali. My už vieme, že Filuta je bližšie k B ako Randoplh ($x < y$), takže Filuta musel preplávať viac ako Randolph. Teraz už s istotou môžeme prehlásiť, že Randoplh preplával najmenej.

Teraz sa pozrime na druhú časť úlohy, kde bolo treba nájsť vhodné miesto stretnutia psov tak, aby dokopy prebehli čo najkratšiu trasu. Keďže Filuta a Randolph vyliezli z jazera presne oproti sebe, oboma smermi (okolo štartu aj okolo Baskera) to majú k sebe rovnako ďaleko. Takže aby sa vôbec stretli, musia vždy prekonať presne túto vzdialenosť. To znamená, že celkový súčet prebehnutých vzdialeností závisí iba od Baskera. Ten samozrejme prebehne najmenej, ak nebude bežať vôbec. Tým pádom **psi prebehnú najkratšiu trasu vtedy, keď sa stretnú pri Baskerovi**.

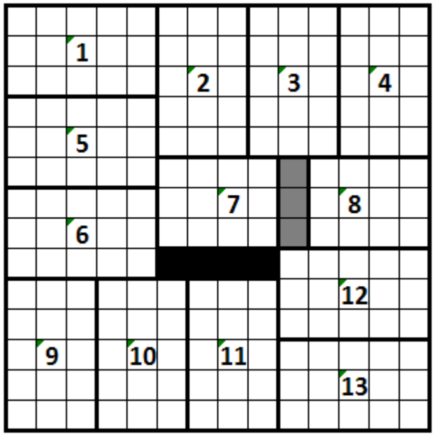
Bodovanie:

správne určenie psa, ktorý preplával najviac – 0,5b.;
správne určenie psa, ktorý preplával najmenej s vysvetlením – 1 plus 1b.;
správne určenie bodu stretnutia s vysvetlením – 1 plus 1b.;
myšlienkové skoky a drobné nepresnosti – mínus 0,3 až 1b.

Úloha S5: Tapety. *Opravovala Lucie „Klávesnica“ Křemenová.*

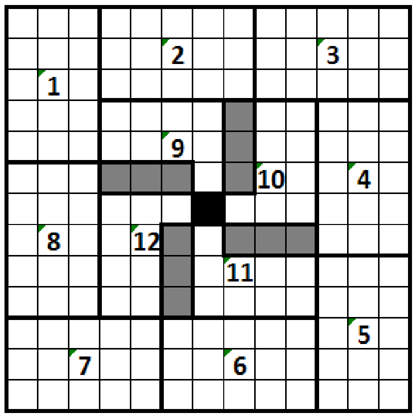
Úloha mala 2 časti, obe s rovnakým spôsobom riešenia. Začneme tým, že nájdeme najmenší možný počet tapiet, ktoré budeme potrebovať. Ten získame tak, že plochu stropu vydelíme plochou jednej tapety: $(14\times14)\ /\ (5\times3) = 196/15 =$ **13,07**; $(13\times13)\ /\ (5\times3) = 169/15 =$ **11,27**. Keďže chceme vytapetovať celý strop, výsledky zaokrúhlime nahor. Budeme teda potrebovať najmenej **14** a **12** tapiet. Teraz skúsime strop pokryť daným počtom tapiet.

Pri ploche 14×14 nie je problém s rozložením tapiet – Obr. 1 (šedá plocha značí prekrývajúce sa tapety; čierna plocha je nepokrytá, na tú použijeme 14. tapetu).



Obr. 1

Pri druhom strope sa nám však nedarí. Našimi 12 tapetami vieme pokryť $12\cdot(5\times3) = 180$ stôp štvorcových, čiže máme iba 11 stôp štvorcových navyše. Najvýhodnejšie sa zdá najprv obložiť obvod bez prekrývania (na Obr. 2 tapety 1 až 8) a následne vyplniť vnútro. Tam nám vznikne štvorec 7×7 a zostanú 4 nepoužité tapety. Avšak dĺžku 7 pomocou rozmerov 3 a 5 nedosiahneme. Najbližšia možná hodnota je 8 (3+5). Tým stratíme na každej strane vnútorného štvorca 7×7 minimálne 3 stopy štvorcové (na Obr. 2 tapety 9 až 12; šedé políčka značia prekrývajúce sa tapety), čo je spolu strata $4\cdot3 = 12$ stôp štvorcových. Na to nám naša rezerva 11 stôp nebude stačiť a logicky nám tak vznikne nevyplnená práve jedna stopa štvorcová (na Obr. 2 čierna). Preto potrebujeme ešte jednu tapetu navyše. Dokopy ich teda na plochu 13×13 minieme 13. Budeme teda potrebovať 14 a 13 tapiet.



Obr. 2

Bodovanie:

správna odpoveď na obe časti – 1,5b.;

postup (zistenie teoretickej odpovede, dôkaz, vysvetlenie) – 3,5b.

P-MATn.o.®

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

AGENTÚRA NA PODPORU VÝSKUMU A VÝVOJA

Pikomat je podporovaný Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy číslo LPP-0375-09.