PIKOMAT
Vzorové riešenia 1. série zimnej časti kategórie 7-9

Príklad S1: opravovala Alenka Kovárová

Pretože kocka má hranu dlhú a=60cm, tak jej povrch bude 6a2 = 6.60.60cm^2 = 21600cm^2. Pretože stolička má o 1/6 väčší povrch, bude to 21600cm^2. (1+1/6) = 25200 cm^2. Táto plocha sa dá vyjadriť aj sčítaním plôch stien pokrývajúcich stoličku, konkrétne sú to 3 štvorce: $3a^2$, 2 štvorce bez obdĺžnika: 2.(a^2-xy), na podstave dva obdĺžniky: a.(a-y), vnútri hore obdĺžnik: ay, posledné dva sú obdĺžniky vnútri na bokoch: 2ax. Keď to napíšeme ako rovnicu, dostaneme: 25200cm^2 = $3a^2$ + 2.(a^2-xy) + a.(a-y) + ay + 2ax, po úprave 1800cm^2 = x.(60cm - y). Kto sa dopracoval k tomuto, dostal aspoň 2 body. V zadaní sa píše, že x a y sú celé čísla a logicky 0 < x < 60 a 0 < y < 60, lebo vyrezaný kváder nemôže mať väčšie rozmery ako kocka. Je viacero spôsobov, ako nájsť také x a y, napr. na základe prvočíselného rozkladu nájsť všetky delitele 1800, alebo jednoducho vyskúšať všetky čísla od 1 po 59 dosádzať za x a vypočítavať y. Na kalkulačke to ide vcelku rýchlo. Riešenie je každá dvojica čísel splňujúca vyššie uvedené podmienky. To splňujú iba 4 dvojice: x =50 a y =36 , x = 45 a y = 20, x = 40 a y = 15, x = 36 a y = 10. Kto rozumne dospel k týmto riešeniam, dostal 5 bodov. Ďalej možno ešte dodať, že pomer objemu kocky k objemu vyrezaného kvádra: a3:axy je po rade 1:3, 1:4, 1:6 a 1:10. Pretože 6 bolo asi ich šťastné číslo, dá sa predpokladať, že bolo treba vyrezať kváder rozmerov 15 . 40 . 60cm^3.

Kto od začiatku vychádzal z predpokladu, že a^3:axy=1:6, dostal max. 3 body, lebo nikde nebolo napísané, či bol tento predpoklad správny alebo nie.

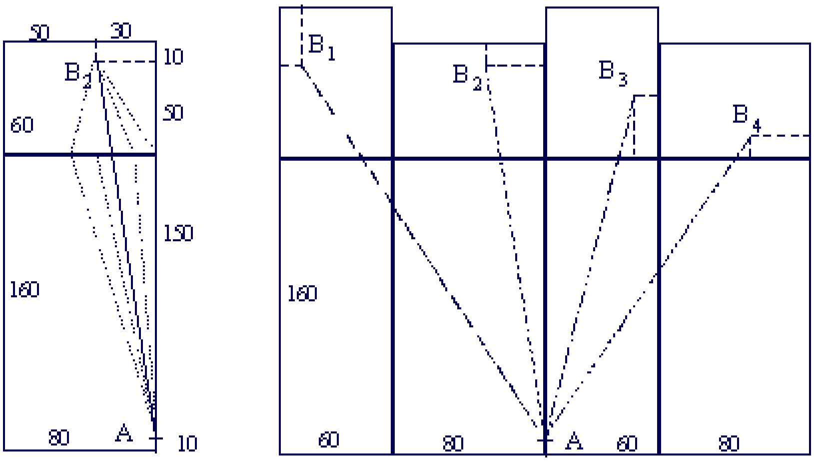
Príklad S2: opravovala Táňa Viszusová

Pri čítaní tohto vzoráku si skúste pekne postupne kresliť na papier o čom čítate. Zo zadania vieme, že lichobežník je rovnoramenný a že veľkosť uhla α je 60°. Z toho je teda jasné, že aj β= 60°. No a keďže súčet uhlov v štvoruholníku je vždy 360° a vieme že uhly γ a δ musia byť rovnaké, je jasné že platí γ = δ = 120°. Os uhla α rozdeľuje tento uhol na dve zhodné časti, každá z nich má 30°. Teraz sa pozrieme na trojuholník ABC. Uhol pri A má 30°, uhol pri B má 60°, a keďže súčet uhlov v trojuholníku je vždy 180°, nutne z toho vyplýva, že veľkosť uhla ACB je 90°. Teraz si predĺžime ramená lichobežníka. Pretnú sa nám v nejakom jednom bode, nazvime ho E. Pozrime sa na trojuholník ABE. Keďže má dva uhly po 60°, musí byť rovnostranný. No a keďže priamka AC vychádza z bodu C a je kolmá na stranu BE, musí to byť súčastne ťažnica a teda bod C je stredom strany BE. A keďže AB je rovnobežné s CD, musí byť CD strednou priečkou trojuholníka ABE, teda aj D je stredom AE a musí platiť, že AB je dvojnásobok CD. Dorobením ďalších stredných priečok DS (S je stred AB) a SC sa nám lichobežník rozdelí na tri zhodné rovnostranné trojuholníky, každý má obsah 78 : 3 = 26 cm^2. Všimneme si teraz rovnobežník ASCD. Musí mať obsah 52 cm^2. Úsečka AC je jeho uhlopriečkou, takže ho delí na dve zhodné časti (lebo je to vlastne kosoštvorec). Tie dve časti sú trojuholníky ACD a ASC. Teda obsah trojuholníka ACD je 52 : 2 = 26 cm^2. No a keďže trojuholník ACD je tretinou obsahu lichobežníka a potrebujeme naň 3 povrchy, na celý lichobežník treba 9 povrchov.

Bodovanie: Za nedostatočné zdôvodnenie prečo S leží v strede AB -1b, za nedostatky v slovnom komentári závažnejšieho charakteru 0,5 až 3b dole, ak ste mali iba odpoveď a obrázok, v závislosti od zrozumiteľnosti nákresu ste sa mohli vyšplhať až na 2b. Takže tak.

Príklad S3: opravovala Dáša Horáková

Možno budete prekvapení, ale to úplne najsprávnejšie riešenie sa podarilo nájsť len štyrom z vás. Prečo? Pretože bolo trochu menej viditeľné a viac unikalo vašim skúmavým pohľadom. Mnohí z vás ale našli druhé najsprávnejšie riešenie :-). Pre vás všetkých mám jednu radu, skúste si napriek všetkým zdaniam predstaviť, že najkratšia cesta by mohla prechádzať TROMI stenami, nie dvoma, ako ste predpokladali. Čo, už ste to uvideli? Ak nie, pozrite sa na kváder ešte raz, alebo aj viackrát… A pre vás ostatných: prasklina mala viesť povrchom kvádra. Aby sme ju ľahko našli, tak sme si rozložili plášť kvádra a hľadali sme najkratšiu spojnicu medzi bodmi A a B. Pozrite sa na prvý obrázok. Ten znázorňuje prednú a vrchnú stenu kvádra a naše dva body. Bodkovanou čiarou je vyznačených niekoľko možných ciest, plnou čiarou tá najkratšia idúca týmito dvoma stenami. Že je ozaj najkratšia? Je. Dobre sa jej prizrite... Lenže prasklina by pokojne mohla ísť aj niektorou z iných stien. Všetky možnosti sú uvedené na obrázku hneď vedľa. Cesta mohla viesť dvoma stenami - vrchnou a prednou (AB2) alebo vrchnou a pravou bočnou (AB3), alebo troma stenami - vrchnou, ľavou bočnou a prednou (AB1) alebo vrchnou, zadnou a pravou bočnou (AB4). (Áno, mohla by viesť aj štyrmi stenami, ale overenie, že všetky takéto cesty by boli dlhšie, nechávam na vás.) Dĺžky týchto ciest ste mohli zistiť pomocou Pytagorovej vety, ale aj porovnaním dĺžok jednotlivých úsečiek, ak ste si presne narysovali zmenšené siete kvádrov. Trochu prekvapujúca, ale najkratšia trasa bola práve tá idúca cez tri steny - AB4. Jej dĺžka bola po zaokrúhlení na stotiny 183,58 cm.



A bodovanie? Za popísanie niekoľkých ciest, ktoré však neboli najkratšími cestami ani len v rámci niektorých dvoch stien bolo 0,5-1b, za nájdenie aspoň jednej najkratšej cesty cez dve steny 2,5 bodu, za nájdenie a porovnanie dĺžok dvoch rôznych takýchto ciest 4 body a za porovnanie štyroch ciest a nájdenie tej správnej 5 bodov.

Príklad S4: opravovala Lenka Gažová

Ak označíme hmotnosť jednej naberačky cukru (teda množstvo cukru, ktoré sa zmestí do jednej naberačky) x, potom Kubov výrok môžeme vyjadriť nerovnicou:
$3x < x + x^2 + 1$, čo sa dá upraviť na tvar: $2x < x^2 + 1$

Tu vidíme, že sa neoplatí skúšať čísla väčšie alebo rovné 2, pretože pre dvojku platí ($2x = x^2$) $2 \,.\, 2 = 2^2$, pre čísla väčšie ako 2 už dostávame, že $2.x < x.x$. Keďže váhy sú presné len na desatiny gramu, zostáva nám odskúšať už len možnosti 0,1 - 1,9. Kvôli nepresnosti váh dochádza k tomu, že hmotnosti sa zaokrúhľujú na 1 desatinné miesto (napr. hmotnosť 3,07 g odváži váha ako 3,1 g a podobne). Po odskúšaní týchto možností nám vyjdú tieto riešenia:
$x_1 = 0{,}8$ $Ľ = 2.0{,}8 = 1{,}6$ $P = 0{,}82 + 1 = 0{,}64 + 1 = 1{,}64 \approx 1{,}6$ $Ľ = P$
$x_2 = 0{,}9$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1{,}1$, $x_5 = 1{,}2$
$x' = 0{,}7$ a $x'' = 1{,}3$ už nevychádzajú:
$Ľ = 2.0{,}7 = 1{,}4$ $P = 0{,}72 + 1 = 1{,}49 \approx 1{,}5$ $Ľ < P$
$Ľ = 2.1{,}3 = 2{,}6$ $P = 1{,}32 + 1 = 2{,}69 \approx 2{,}7$ $Ľ < P$

Bodovanie: nájdenie 1-tky ako riešenia 1b, nájdenie zvyšných riešení 2b, zdôvodnenie +dôkaz 2b

Príklad S5: opravoval Martin Malic Handlovič

Aby sme mohli určiť, či si niekto môže byť istý musíme sa na príklad pozerať z pohľadu každého človeka. Teda Anka: Tá nemá šancu zistiť kto má koho, lebo pozná iba to, že má Kubka. Ja: Môžem si vytiahnúť Božku, alebo Anku. Ak mám Božku, tak Kubko má Anku a Božka mňa, alebo má Kubko mňa a Božka Anku. Teda nie som si istý, kto koho má. Ak mám ale Anku, tak Kubko má Božku (lebo Božka nemôže mať sama seba) a Božka má mňa. Teraz som si istý. Božka: Môže si vytiahnuť Mňa alebo Anku. Ak má Mňa, tak Kubko má Anku a Ja Božku, alebo má Kubko Božku a Ja Anku. Teda si nie je istá, kto koho má. Ak má ale Anku, tak Kubko má mňa (lebo Ja nemôžem mať sam seba) a Ja má Božku. Teraz si je istá.

Kubko:Kubko vie vždy kto koho má. Ak má Anku, tak si ja a Božka dávame darčeky navzájom. Ak má Božku, tak ja mám Anku (nemôžem mať sám seba) a Božka má mňa. Ak má mňa, tak ja mám Božku (nemôže mať Božka sama seba) a Božka má Anku.

Záver: Kubo si je istý vždy, Anka nikdy a ja a Božka len keď sme si vytiahli Anku.

Bodovanie: Veľa z vás nemalo všetky možnosti rozdelenia a niektorí z vás písali len riešenie pre mňa a o ostatných sa neuvažovalo. Primerane kvalite riešenia a popisu ste mohli dostať od 0 až po 5 bodov. 4,5 bodové riešenia: Mnoho z Vás malo 4,5 bodu, lebo ste zabudli na Anku. Stačilo totiž napísať aspoň jednu vetu o tom, že Anka nemôže zistiť, kto čo má. Preto som vám musel strhnúť pol bodu. Toť vsio.

Príklad S6: opravoval Mišo Priky Prikler

Ahojte všetci! Uff, tak už to máme za sebou. Čo? Veď 1. Sériu, samozrejme :-). No, keby som to mal zhrnúť do jedného slova, tak by som asi použil : HROZNÉÉÉÉÉ!!! Ale nie, no ... čakal som viac bezchybných riešení. Je pravda, že tam bol chytáčik, s tým opakovaním písmeniek, no ... nemysleli sme, že vás to niektorých zastaví :-(. Veď ako mi jeden z vás napísal, čo nie je zakázané, je dovolené! Je to pekné a je to tak. Aspoň takto v príkladoch určite :-). Ale tak čo už? Snáď sa aspoň poučíte do budúcnosti!?!?!? Dalo sa to riešiť rôzne. Niektorí to riešili vypisovaním a iní zas nejakým systémom, resp. logickými úvahami. Nehnevajte sa na mňa, no to vypisovanie je práca na koňa a aj tak nemáte záruku, že nájdete všetky riešenia. No oki, bral som aj takéto riešenie, ak to niekomu vyšlo a napísal mi na papier všetky možnosti, ktoré vylúčil! Ak nie, tak to nebolo celé riešenie a považoval som to len za typovanie. No ten druhý spôsob je už rozumnejší. Veď z podmienok, ktoré boli dané vyplývajú nejaké súvislosti, ktoré všetky možnosti zredukujú len na pár možných a z nich už potom ľahko nájdeme tie, ktoré vyhovujú všetkým podmienkam. Každá tá podmienka tam mala zmysel, takže ... nemal byť problém. Veď sa pozrime na riešenie!

1. Najprv si vypíšeme prvočísla, čo ste nie všetci zvládli správne. Sú to : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23
2. Máme 5 písmen, ktoré keď nahradíme poradovými číslami v abecede dostaneme 9-ciferné číslo. A z toho možno usudzovať, že 4 písmena budú mať 2-ciferné poradové číslo a jedno písmeno bude mať len 1-ciferné
3. Ďalej vieme, že v strede je najväčšie číslo, takže bude určite 2-ciferné! A tak nám ostali už len tri 2-ciferné a jedno 1-ciferné číslo a z nich máme vytvoriť dvojice, ktorých súčet bude rovnaký! Takže vieme aj to, že jedna dvojica bude určite pozostávať z dvoch 2-ciferných čísel. A keďže vieme, že súčet tejto dvojice musí byť menší než 26, tak nám veľa možností nezostane. Konkrétne sú to : 11, 11 alebo 11, 13
4. K súčtu týchto dvoch čísel musíme nájsť jedno 1-ciferné a jedno 2-ciferné číslo, ktorých súčet bude rovnako veľký. Potom k dvojici 11, 13 nám vyhovujú len možnosti 19, 5 alebo 17, 7. A k dvojici 11, 11 to sú 17, 5 alebo 19, 3
5. Teraz môžeme ku každej štvorici prideliť to najväčšie stredné číslo. Takže :
   11, 13, 19, 5 - môže tam byť len 23, no potom toto číslo nie je deliteľné tromi
   11, 13, 17, 7 - môže ta byť aj 19 aj 23, no ani jedna možnosť nebude taktiež deliteľná tromi
   11, 11, 17, 5 - môže tam byť 19 aj 23, no podmienke deliteľnosti vyhovuje len možnosť s číslom 19 v strede
   11, 11, 19, 3 - môže tam byť len 23, no ani táto možnosť nie je deliteľná tromi
6. Takže nám vyšla len jediná možná kombinácia, ktorá spĺňa podmienku rovnakého súčtu prvej a poslednej dvojice a zároveň aj podmienku deliteľnosti tromi

Aby platili všetky podmienky zo zadania, musí táto pätica čísel prejsť ešte malou kozmetickou úpravou, takže : musia byť splnené podmienky, stredné číslo je najväčšie a 1. < 5. Potom to bude :
11 11 19 5 17
No keď sa na to riadne zahľadím, vykúka odtiaľ ešte jedna možnosť, ktorá taktiež spĺňa všetky podmienky a to :
5 17 19 11 11
A už len nahradím čísla za písmenká z abecedy a už som aj pri maškrte :-). Čiže kód mohol byť K K S E Q alebo E Q S K K

To je čo sa týka tohto riešenia všetko. Vravím, že tohto riešenia, pretože sa to dalo aj iným spôsobom vyriešiť, čo ste nakoniec aj mnohí využili - cez úvahy o deliteľnosti a pod. Ja som akceptoval všetky správne riešenia.

No a ako som hodnotil? Tak za každý jeden správny výsledok sa dalo získať po jednom bode, t.j. za oba výsledky to sú už dva body. Ďalej, za napísaný číselný postup som dával dva body. Samozrejme, ak si ho nemal/a celý, tak len časť z dvoch bodov :-). No a za slovne zdôvodnenie som dával jeden bod. A samozrejme, že to nie je úplné, pretože som ešte niekomu odrátal alebo prirátal pól bodu podľa toho čo tam mal. Keď mi tam chýbala nejaká podmienka, tak - 0,5 a ak tam bola nejaká pekná správna myšlienka, tak +0,5. A to je už asi ozaj všetko. Majte sa.

P.S. : Skoro by som bol už zabudol. Pozdravujem do Topoľčian - konkrétne baby z IX. C ; do Budimíra (inak to je kde? Vraj okres KE?) - baby z VII. A a z VIII. A (to ste už trochu prehnali - 4 z jednej triedy???) ; do Prešova - chalanov zo VII. A. Spomínam to preto, lebo vás bolo ozaj veľa!!! Nabudúce sa trocha kroťte. Mňa nebaví 4-krát opravovať jedno a to isté (ešte k tomu chybné) riešenie. Oki? A už ozaj končím :-) ETO VSJO