PIKOMAT
17. ročník šk. rok 1999/2000

Vzorové riešenia 1. série zimnej časti

Príklad 1:

Máme dve čísla, jedno je (x + y) a druhé (x - y). Keďže menšie z nich sa má rovnať -20 a väčšie 40, máme dve možnosti: (x + y) = -20 a (x - y) = 40, alebo (x + y) = 40 a (x - y) = -20. Tým dostávame dve sústavy rovníc o dvoch neznámych. x + y = 40 a x + y = -20

<u>x – y = -20 x – y = 40</u>
2x + 0y = 20 2x + 0y = 20
x = 10 x = 10
teraz ešte dorátať y v každej! sústave
10 + y = 40 10 + y = -20
y = 40 – 10 y = -20 – 10
y = 30 y = -30

Čiže dostali sme dvojicu riešení (10, 30) a (10, -30). Po skúške správnosti vidíme, že obidve riešenia naozaj spĺňajú požadovanú podmienku.

Príklad 2:

Máme 4 čísla : (2x-y) = A, (x+y) = B, (2x+y) = C a (x-y) = D. Môžu nám nastať takéto štyri prípady:

- A < B a C < D, potom (2x-y) = 26 a (x-y) = 46
- A > B a C < D, potom (x+y) = 26 a (x-y) = 46
- A < B a C > D, potom (2x-y) = 26 a (2x+y) = 46
- A > B a C > D, potom (x+y) = 26 a (2x+y)= 46.

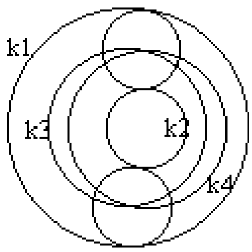
Nebolo akceptované tvrdenie, že C > D vždy, lebo to v celých číslach neplatí, B môže byť väčšie, menšie a aj rovné D na množine celých čísel. Dostali sme teda štyri sústavy rovníc o dvoch neznámych. Iné možnosti kombinácií už nie sú, teda všetky existujúce riešenia dostaneme z týchto sústav. Vyriešením sústav dostaneme štyri dvojice výsledkov : (18, 10), (36, -10), (-20, -66) a (20, 6). Teraz ešte skontrolujeme, či naše dvojice spĺňajú všetky podmienky (na čo mnohý z Vás zabudli).

1. 2.18 - 10 = 26 a 18 + 10 = 28, 26 < 282.18 + 10 = 46 a 18 - 10 = 8, 46 > 8
2. 2.36 - (-10) = 82 a 36 - 10 = 26, 82 > 26 2.36 - 10 = 62 a 36 - (-10) = 46, 62 > 46
3. 2.(-20) - (-66) = 26 a –20 - 66 = -86, 26 > -86 2.(-20) - 66 = -106 a –20 - (-66) = 46, -106 < 46
4. 2.20 - 6 = 34 a 20 + 6 = 26, 34 > 26 2.20 + 6 = 46 a 20 - 6 = 14, 46 > 14

Vidíme, že pri druhom prípade je väčšie z C a D rovné 62, čo je nesprávne a v treťom prípade je menšie z A a B –86, čo tiež nevyhovuje podmienkam. A tak dostávame iba dve správne riešenia (18, 10) a (20, 6).

Príklad 3:

Najprv si dokážeme, že stred strednej malej kružnice je totožný so stredom veľkej kružnice.



Dokážme to sporom. Najprv si ešte polomer veľkej kružnice (k1) označme R a polomer malých kružníc r. Nech stredy nie sú totožné. Potom na kružnici k3 ležia stredy všetkých tých kružníc s polomerom r, ktoré sa zvnútra dotýkajú veľkej kružnice, polomer k3 = R - r a jej stred je totožný so stredom k1. Na kružnici k4 zase ležia stredy tých kružníc s polomerom r, ktoré sa zvonku dotýkajú kružnice k2. Polomer k4 je r + r a jej stred je totožný so stredom k2.

Z toho, že sa kružnice k3 a k4 pretínajú iba v dvoch bodoch vyplýva, že existujú iba dve kružnice, ktoré sa zároveň dotýkajú kružníc k1 a k2. Preto aby existovali 4 takéto kružnice, musia byť kružnice k3 a k4 totožné. To je možné iba vtedy, kaď sú stredy k1 a k2 totožné. Teraz ešte zistíme, aký je r. Vieme, že polomer k3 sa rovná polomeru k4. Z toho máme R - r = r + r, čiže R = 3r, teda r = 2m. Teraz už vypočítame obsahy piatich malých kruhov ako $S = 5(\pi.2^2) = 5.12{,}56\ m^2 = 62{,}8m^2$.

Príklad 4:

Keď je obsah piatich malých štvorcov $20cm^2$, tak obsah jedného malého štvorca je $20 : 5 = 4cm^2$. Z toho vypočítame stranu štvorca ako $a = \sqrt{4\ cm^2} = 2$ cm (a nie ako 4:2, ako mnohý z Vás). Keďže kruh vpísaný do malého štvorca sa dotýka všetkých štyroch strán, jeho polomer je a:2 = 1cm. Polomer veľkého kruhu je 3a : 2 = 3 cm, lebo strana štvorca, do ktorého je vpísaný, je 3a. Teraz vypočítame obsah malého kruhu S_1 a veľkého S_2. $S_1 = \pi.1^2 = \pi\ cm^2$. $S_2 = \pi.3^2 = 9\pi\ cm^2$. Ich pomer je $S_1{:}S_2 = \pi{:}(9\pi) = \underline{1{:}9}$.

Príklad 5:

Riešenie tohoto príkladu je totožné s riešením predchádzajúceho príkladu, len si treba uvedomiť, polomer kružnice opísanej štvorcu je polovica dĺžky uhlopriečky štvorca. Keďže už máme dĺžku strany, vypočítame dĺžku uhlopriečky pomocou Pytagorovej vety : $u = \sqrt{(a^2 + a^2)} = \sqrt{(2a^2)} = a\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. Teda polovica uhlopriečky malého štvorca je rovná $\sqrt{2}$. Uhlopriečka veľkého štvorca je $U = \sqrt{((3a)^2 + (3a)^2)} = \sqrt{(2.(3a)^2)} = 3a.\sqrt{2} = 6.\sqrt{2}$, polovica je teda $3.\sqrt{2}$. Teraz už pokračujeme ako v predchádzajúcom príklade: vypočítame obsah malého kruhu S_1 a veľkého S_2.

$S_1 = \pi(\sqrt{2})^2 = \pi.2\ cm^2$. $S_2 = \pi.(3.\sqrt{2})^2 = 9.2.\pi\ cm^2$. Ich pomer je $S_1{:}S_2 = (\pi.2){:}\ (9.2.\pi) = \underline{1{:}9}$, čiže pomer sa nezmenil.

Príklad 6:

Čas	Počet minút	1. vlak (60 km/hod)	2. vlak (60 km/hod)
0:00 – 6:30*	390 min	360 km	360 km
6:30 – 8:30	120 min	120 km	120 km
8:30 – 8:40	10 min	Stojí	10 KM
8:40 – 8:55	15 min	15 km	15 km
Spolu	535 min = 8:55	495 km	505 km

* Prvý i druhý vlak stojí po 2-och hodinách na 10 minút. Keď toto zopakuje 3-krát, tak išiel 6 hodín a stál 30 minút. (6 hod = 360 min) Prestávky prvého vlaku boli v časoch 2:00 – 2:10, 4:10 – 4:20 a 6:20 – 6:30. Prestávky druhého vlaku boli v časoch 3:00 – 3:15 a 6:15 – 6:30.

Keď ide vlak 60 km/hod, tak ide 60 km za 60 min (60 min = 1 hod), teda ide 1 km za 1 min.

Vlaky prešli 495 km + 505 km = 1000 km za 8 hodín a 55 minút.

Príklad 7:

Čas	Počet minút	1. vlak (60 km/hod)	2. vlak (90 km/hod)
0:00 – 6:30*	390 min	360 km	540 km
6:30 – 7:10	40 min	40 km	60 Km
Spolu	430 min	400 km	600 km

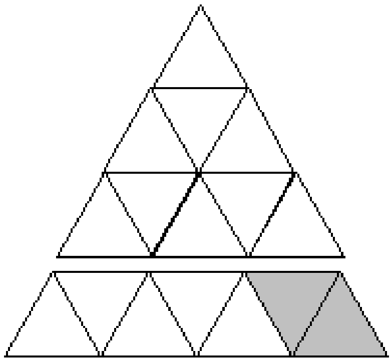
* Prvý vlak stojí po 2-och hodinách na 10 minút. Keď toto zopakuje 3-krát, tak išiel 6 hodín a stál 30 minút. Druhý vlak stojí po 3-och hodinách na 15 minút. Keď toto zopakuje 2-krát, tak išiel 6 hodín a stál 30 minút. (6 hod = 360 min) Prestávky prvého vlaku boli v časoch 2:00 – 2:10, 4:10 – 4:20 a 6:20 – 6:30. Prestávky druhého vlaku boli v časoch

3:00 – 3:15 a 6:15 – 6:30.

Keď ide vlak 60 km/hod, tak ide 60 km za 60 min (60 min = 1 hod), teda ide 10 km za 10 min. Keď ide vlak 90 km/hod, tak ide 90 km za 60 min, teda ide 15 km za 10 minút.

Vlaky prešli 400 km + 600 km = 1000 km za 7 hodín a 10 minút.

Príklad 8:



Keď budeme k už vytvorenému rovnostrannému trojuholníku pridávať ďalšie rady, zistíme, že v nasledujúcom rade je o 2 dlaždice viac, ako v predchádzajúcom. Musíme teda hľadať najväčšie číslo tvaru:

$1 + 3 + \ldots + (2x-1)$, ktoré je menšie ako 1000. Je dobré počítanie si nejako zjednodušiť a zistiť, či nám neplatia nejaké všeobecne platné vlastnosti. Napríklad v našom prípade sa súčet po sebe idúcich nepárnych čísel rovná druhej mocnine nejakého prirodzeného čísla. Ešte si to dokážeme.

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-3) + (2n-1) = x.$

$\underline{+ (2n-1) + (2n-3) + \ldots\ldots + 3 + 1 = x.}$

$2n + 2n + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2n + 2a = 2x.$

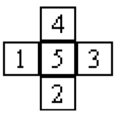
←——————————————————————→

n-krát

Koľkokrát sa tu 2n nachádza zistíme z počtu sčítaných čísel. $2n*n = 2x$. Máme $2n*n = 2x$, z toho $2n^2 = 2x$ a potom $n^2 = x$, čiže ich súčet je naozaj nejaká druhá mocnina. Naša úloha sa zmenila na úlohu nájsť čo najväčšie 3-ciferné číslo, ktorého odmocnina je prirodzené číslo. To už ale zistíme jednoducho : $\sqrt{999} = 31{,}606$. A tak $31^2 = 961$ bude najväčšie také číslo.

Príklad 9:

Dá sa nájsť 14 rôznych pravouholníkových útvarov:



<u>1 ohnutá stena:</u>
1) stena 1 – hore

<u>2 ohnuté steny:</u>
2)1,2 – hore
3)1 – hore, 2 – dole
4)1,3 – hore
5)1 – hore, 3 – dole
6)1 – hore, 4 – dole

<u>3 ohnuté steny</u>
7)1,2,3 – hore
8)1,2 – hore, 3 – dole
9)1,2 – hore, 4 – dole
10)1,3 – hore, 2 – dole

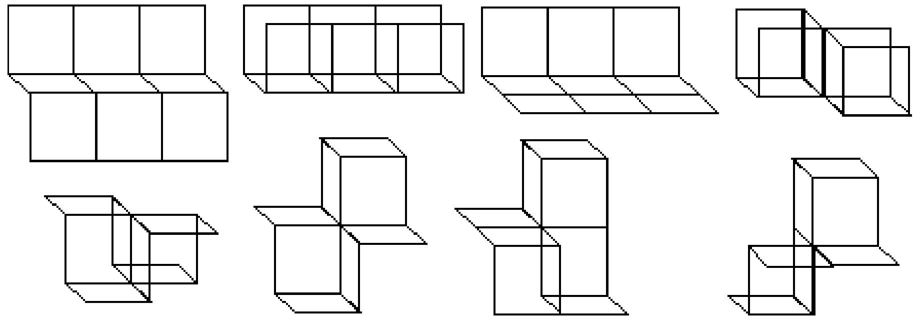
<u>4 ohnuté steny</u>
11)1,2,3,4 – hore
12)1,2,3 – hore, 4 – dole

13)1,2 – hore, 3,4 – dole
14)1,3 – hore, 2,4 – dole

Útvary, ktoré sú po otočení rovnaké považujeme za jeden útvar. Mnohí z vás ale zabudli na zrkadlové útvary, ktoré však nie sú zhodné. (sú to prípady 3 a 6, 8 a 9)

Príklad 10:

Dá sa nájsť 8 rôznych pravouholníkových útvarov (podľa zadania). Útvary, ktoré sú po otočení rovnaké považujeme za jeden útvar. (7. a 8. útvar sú zrkadlové)



Príklad 11:

V podstate existujú dve riešenia príkladu. Jedno veľmi elegantné, druhé trošku ťažkopádne. Najdôležitejšie je uvedomiť si, že žiakov nemuselo byť nutne jedenásť (to sa mimochodom z 207 riešiteľov podarilo len 24 riešiteľom). Ak *čas práce posledného* označíme ***x*** a ***t*** *čas, po ktorom sa jednotliví brigádnici pridávali* do práce, nemusí sa x nutne rovnať t (všimnite si postupnosť1,3,5,7,11: rozdiel medzi susednými členmi je 2, posledný je 11-násobkom prvého - spĺňa teda prvú časť zadania - a predsa je v nej len šesť a nie 11 členov). Ak *počet pracovníkov* označíme ***p*** , tak iste platí: *x...čas práce posledného* , $x + 1.t$ *... čas práce predposledného* , $x + 2.t$ *... čas práce predpredposledného* , atď. až $x + (p\text{-}2).t$ *... čas práce druhého* a konečne $x + (p\text{-}1).t$ *je časom práce prvého* brigádnika. Navyše zo zadania vieme, že prvý pracoval 11-krát dlhšie než posledný, teda $x + (p\text{-}1).t = 11x$, odtiaľ jednoduchou úpravou $(p\text{-}1).t = 10x$. Ďalej je dôležité uvedomiť si, že práce je "stále rovnako" bez ohľadu na to, koľkí je vykonávajú. Keby teda všetci pracovali naraz počas 24 dní, práca vlastne "spotrebuje" 24p dní práce (toľko dní by musel pracovať jednotlivec sám). Tento čas teda musia dať dokopy aj žiaci, keď sa do práce pridávajú postupne. To vedie k rovnosti $[x + (p\text{-}1).t] + [x + (p\text{-}2).t] + ... + [x + 1.t] + x = 24p$ *{dní}* . Úpravou rovnice získame $p.x + t.[(p\text{-}1) + (p\text{-}2) + ... + 1] = 24p$. V hranatej zátvorke je vlastne p-1 členov aritmetickej postupnosti. Ich súčet vypočítam, ak sčítam prvého a posledného člena a vynásobím polovicu členov postupnosti (to je objav nemeckého matematika Gaussa - ak neveríte, vyskúšajte si to na číselnej postupnosti). Teda získam $p.x + t.\ p.(p\text{-}1) / 2 = 24p$. Ak využijem a dosadím do rovnice vzťah získaný skôr: t.(p-1) = 10.x, tak dostanem $p.x + p.5.x = 24p$. Odtiaľ $6.x = 24$. Teda $\boldsymbol{x = 4}$ *{dni}* , a to je čas práce posledného brigádnika. Sami uznáte, že toto riešenie nebolo to "elegantné". Jeho myšlienka je iná: ak sa žiaci pridávajú do práce postupne, ale s rovnakým časovým odstupom, ten čo sa pridá ako prostredný by mal pracovať rovnako dlho, ako je "priemer" skupiny. Zo zadania vieme, že priemer je 24 dní. Teraz stačí nájsť dve také čísla (čas práce prvého a čas práce posledného brigádnika), ktorých priemer je 24 a navyše jedno je jedenásť násobkom druhého. Teda nech jedno je x, potom druhé musí byť 11x a hodnotu ich priemeru môžeme zapísať ako $(x + 11x) : 2 = 24$. Odtiaľ triviálnou úpravou 12.x = 48, čiže opäť $\boldsymbol{x = 4}$ a to je čas práce posledného brigádnika. *Posledný žiak pracoval* ***4 dni.***

Príklad 12:

1. Kód je číslo deliteľné tromi => súčet cifier je deliteľný tromi.
2. Súčet cifier je prvočíslo.
3. Z 1. a 2. => ciferný súčet kódu je rovný 3. (Jedine 3 je zároveň deliteľné tromi a je prvočíslo)
4. Kód je tvorený piatimi nepárnymi ciframi (je to 5-miestne číslo) => najmenší možný ciferný súčet kódu je 1+1+1+1+1 = 5 (najmenšie 5-miestne číslo tvorené len nepárnymi ciframi je 11111). Pozn. Veľká časť riešiteľov brala nulu za nepárne (alebo neutrálne) číslo. Nula je párne číslo!!!
5. Z 3. a 4. => kód neexistuje, lebo súčet piatich nepárnych čísel bude vždy väčší ako 3.