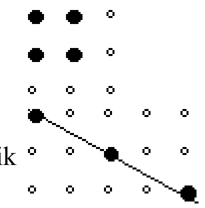
PIKOMAT
16. ročník šk. rok 1998/99

Vzorové riešenia 2. série zimnej časti

Príklad 1:

Rýchlo sa dá prísť na to, že vtáčik môže mať aspoň štyri hniezda. Napríklad takto:



Ukážeme si, že ich nemôže mať viac. Použijeme na to takúto úvahu: Keď je vzdialenosť dvoch stromov aj v smere radov aj v smere stĺpcov párna, na pol ceste medzi nimi je tiež strom. Takže vtáčik nemôže mať dve hniezda na stromoch, ktoré sú od seba vzdialené o párny počet radov a stĺpcov.

Na a nie je ťažké rozdeliť stromy do 4 skupín, kde v každej skupine sú všetky stromy vzdialené o párny počet radov a stĺpcov. V každej skupine môže byť iba 1 hniezdo, a teda hniezd môže byť najviac štyri.

1 2 1 2 1 2 1 2 1 2

3 4 3 4 3 4 3 4 3 4

1 2 1 2 1 2 1 2 1 2

3 4 3 4 3 4 3 4 3 4

…

Príklad 2:

Zoberme si tieto zvieratá: zajac, líška, vlk a medveď. Vieme, že medveď by zožral vlka aj líšku a zajac je naňho alergický, takže nemôže byť so žiadnym z nich v klietke. Takisto vlk by zožral líšku a zajaca, takže tiež nemôže byť s nikým v klietke. Líška by zjedla zajaca, nemôžu byť teda spolu v klietke. Zistili sme, že každé z týchto zvierat musí byť v inej klietke. Potrebujeme minimálne 4 klietky. Musíme ešte ukázať, že 4 klietky budú stačiť. Dajme napr. leva k líške a rysa s tigrom k medveďovi. Záver:

Lovec potrebuje minimálne 4 klietky.

Príklad 3:

Príklad môžeme riešiť viacerými spôsobmi. Jeden spôsob je cez súčet obvodov sústredných kružníc.

(d_1 = 7cm = 70mm, r_1 = 35mm, d_2 = 16cm = 160mm, r_2 = 80mm, h = 0,25mm) Vrstvy navinutého plátna si môžeme predstaviť (na priereze) ako sústredné kružnice s polomerom vždy o 0,25 mm väčším ako polomer predchádzajúcej kružnice. Výsledná dĺžka plátna bude súčtom dĺžok (obvodov) jednotlivých vrstiev (kružníc). K tomu potrebujeme zistiť počet vrstiev látky (z podielu hrúbky látky a hrúbky jednej vrstvy): hrúbka látky na palici $l = r_2 - r_1$, l = 70mm - 35mm l = 45mm, počet vrstiev n = l / h n=45mm / 0,25mm = 180 vrstiev.

Teraz nás bude zaujímať ako vypočítame obvod jednotlivých kružníc. Pre polomery dvoch po sebe nasledujúcich kružníc (vrstiev) platí: $r_{k+1} = r_k + 0{,}25$ (k, k+1 označuje poradie kružnice - číslo vrstvy). Pre ich obvody potom platí: $O_k = 2\pi r_k$, $O_{k+1} = 2\pi r_{k+1} = 2\pi(r_k + 0{,}25)$ a pre ich rozdiel $p = O_{k+1} - O_k = 2\pi(r_{k+1} - r_k)$

$p = 2\pi(r_k + 0{,}25 - r_k) = 2\pi.0{,}25 = 0{,}5\pi$. Dĺžku plátna označme O. Potom pre O platí: $O = O_1 + O_2 + O_3 + \ldots + O_{180}$. Vzhľadom na to, že rozdiel obvodov dvoch nasledujúcich kružníc je konštantný ($p = 0{,}5\pi$), môžme vyjadriť obvod O_{k+1} pomocou obvodu 1. kružnice a k-násobku čísla p: $O_1 = 2\pi r_1$ (r_1 = 35mm čo je vlastne polomer palice), $O_2 = O_1 + p$, $O_3 = O_2 + p = O_1 + 2p$, …, $O_{180} = O_1 + 179p$. Pre O tak dostaneme: $O = O_1 + O_1 + p + O_1 + 2p + O_1 + 3p + \ldots + O_1 + 179p$. $O = 180 . O_1 + p(1 + 2 + 3 + \ldots + 179)$. Čísla 1, 2, 3, …, 179 vieme pekne sčítať po dvojiciach vždy jedno číslo spredu, jedno zozadu: 1 + 179 = 180, 2 + 178 = 180, …, 89 + 91 = 180 to je 89 . 180 = 16020, ešte musíme pripočítať stredný člen → 90, potom 1 + 2 + … + 179 = 16020 + 90 = 16110. Takže $O = 180 . O_1 + 16110p = 180 . 2\pi r_1 + 16110 . 0{,}5\pi = \pi(360 . 35 + 8055)$ = 64856,7mm (pre $\pi = 3{,}14$). Dĺžka plátna je približne 64,8567 metrov. (Príklad sa dá pekne riešiť aj pomocou objemu látky, ktorý je rovnaký, či je látka navinutá alebo rozvinutá.)

Príklad 4, 5, 6:

! Pozor ! – keďže ste ma nadchli vašimi slohovými prácami, pripravil som si i ja jednu pre Vás. Takže čítajte pekne poporiadku od 2-7-4-1-6-3 - **! Pohov !**

2 litre: Predavač naberie vodu do 5-litrového kotlíka. Preleje jeho objem do 8-litrového kotlíka. Zase naberie vodu do 5-litrového kotlíka. Preleje časť jeho objemu do 8-litrového kotlíka tak, aby sa naplnil.

Zo studne sme nabrali vodu do 5-litrového kotlíka 2 razy. Čiže sme nabrali 2.5 = 10 litrov vody. Žiadnu vodu sme späť do studne nevyliali (10 – 0 = 10). Po skončení nášho prelievania v kotlíkoch sme naplnili 8-litrový kotlík, teda v 5-litrovom kotlíku je **10 – 8 = 2 litre** vody.

7 litrov: Predavač vyleje do studne 8-litrový kotlík. Preleje objem 5-litrového kotlíka do 8-litrového kotlíka. Naberie vodu do 5-litrového kotlíka. Preleje ho do 8-litrového kotlíka.

Do studne sme vyliali vodu z 8-litrového kotlíka, ktorý bol plný (8-litrov vody). Zo studne sme nabrali vodu do 5-litrového kotlíka (5 litrov vody). V kotlíkoch máme teda 10 – 8 + 5 = 7 litrov vody. V 5-litrovom kotlíku máme 0 litrov vody. Teda v 8-litrovom kotlíku máme **7 – 0 = 7 litrov** vody.

4 litre: Predavač naberie vodu do 5-litrvoého kotlíka. Preleje časť jeho objemu do 8-litrového kotlíka tak, aby sa naplnil.

Zo studne sme nabrali vodu do 5-litrového kotlíka. V kotlíkoch má teda 7 + 5 = 12 litrov vody. Po prelievaní máme plný 8-litrový kotlík, teda v 5-litrovom kotlíku je **12 – 8 = 4 litre** vody.

1 liter: Predavač vyleje do studne 8-litrový kotlík. Preleje objem 5-litrového kotlíka do 8-litrového kotlíka. Naberie vodu do 5-litrového kotlíka. Preleje časť jeho objemu do 8-litrového kotlíka tak, aby sa naplnil.

Do studne sme vyliali vodu z 8-litrového kotlíka. Zo studne sme nabrali vodu do 5-litrového kotlíka. V kotlíkoch máme 12 – 8 + 5 = 9 litrov vody. Po prelievaní máme plný 8-litrový kotlík, teda v 5-litrovom kotlíku je **9 – 8 = 1 liter** vody.

6 litrov: Predavač do studne vyleje 8-litrový kotlík. Do 8-litrového kotlíka preleje objem 5-litrového kotlíka. Naberie vodu do 5-litrového kotlíka. Preleje objem 5-litrového kotlíka do 8-litrového kotlíka.

Do studne sme vyliali vodu z 8-litrového kotlíka. Zo studne sme nabrali vodu do 5-litrového kotlíka. V kotlíkoch máme 9 – 8 + 5 = 6 litrov vody. V 5-litrovom kotlíku máme 0 litrov vody, teda v 8-litrovom kotlíku máme **6 litrov** vody.

3 litre: Predavač naberie vodu do 5-litrového kotlíka. Preleje časť jeho objemu do 8-litrového kotlíka tak, aby sa naplnil.

Žiadnu vodu sme do studne nevyliali. Zo studne sme nabrali vodu do 5-litrového kotlíka. V kotlíkoch máme 6 – 0 + 5 = 11 litrov vody. Po prelievaní máme plný 8-litrový kotlík, teda v 5-litrovom kotlíku je **11 – 8 = 3 litre** vody.

Príklad 7:

Najskôr vypočítajme, koľko koláčikov sa dá vytvoriť vykrajovaním:
1. krok 768 koláčikov a 768 zvyškov 768 zvyškov / 4 = 192 kúskov cesta
2. krok 192 koláčikov a 192 zvyškov 192 zvyškov / 4 = 48 kúskov cesta
3. krok 48 koláčikov a 48 zvyškov 48 zvyškov / 4 = 12 kúskov cesta
4. krok 12 koláčikov a 12 zvyškov 12 zvyškov / 4 = 3 kúsky cesta
5. krok 3 koláčiky a 3 zvyšky na vykrajovaný koláčik potrebujeme až 4 zvyšky

Vykrajovaných koláčikov teda bude 768 + 192 + 48 + 12 + 3 = 1023.

Keďže vyformovaný koláčik je rovnako veľký a rovnako ťažký ako vykrajovaný a pri formovaní nevzniká odpad (vždy si zoberieme len toľko cesta koľko potrebujeme), určite zvládneme 1023 koláčikov a ešte nám nejaké cesto ostane. Koľko ho ostane? Toľko ako pri vykrajovaní teda 3 zvyšky.

Koľko cesta potrebujeme na 1 koláčik? Skúsme zostaviť rovnice (označme K – koláčik, Z – zvyšok, C – kúsok cesta)

C = K + Z (z jedného cesta je koláčik a zvyšok)

4.Z = C (4 zvyšky sa zlepia do jedného kúsku cesta)

teda 4.Z = C = K + Z, keď z obidvoch strán odrátame jeden zvyšok, ostane rovnosť 3.Z = K

Takže na jeden koláčik stačia akurát tie tri zvyšky, ktoré nám ostali a pekár teda môže formovaním spraviť o 1 koláčik viac ako vykrajovaním.

Príklad 8:

Chceme vybrať pár rovnakých topánok aj ponožiek a to tak, aby obchodník zobral čo najmenej topánok a ponožiek z domu. Musíme teda rátať s tou najhoršou možnosťou, teda s tým, že obchodník vyberie do páru topánku či ponožku až vtedy, keď už bude mať vybraté z každého druhu po jednej. Pri výbere ponožiek sa môže stať, že vyberie prvú ponožku jednej farby a druhú ponožku druhej farby. Tie však netvoria pár a preto nám dve ponožky nestačia na to, aby sme naisto vybrali dve rovnaké ponožky. Obchodník však už nemá ponožky ďalšej farby, preto tretia vytiahnutá ponožka už musí byť farby jednej z prvých dvoch vytiahnutých ponožiek. Preto potrebujeme tri ponožky na to, aby sme určite mali medzi nimi jeden pár.

S topánkami je to podobné. Ak vytiahneme prvé tri topánky, môže sa stať, že všetky tri budú inej farby. Preto potrebujeme zobrať štyri páry topánok, aby medzi nimi bol pár.

Príklad 9:

Keďže groše a 5groše sú vždy celé čísla, ostalo deťom na konci celé číslo. Preto na začiatku museli mať sumu deliteľnú tromi. Z čísiel medzi 140 a 150 sú deliteľné 3-mi len čísla 141, 144 a 147. To sú možné sumy na začiatku. Tomu odpovedajú na konci sumy 94, 95 a 96.

Deti mali groše a 5groše. Označme množstvo grošov na začiatku x a 5-grošov y. po nákupe je grošov y a 5grošov x.

Stačí zistiť kedy majú obe rovnice celočíselné riešenie:

A $x + 5y = 141$ B $x + 5y = 144$ C $x + 5y = 147$

$y + 5x = 94$ $y + 5x = 96$ $y + 5x = 98$

$x = 141 – 5y$ $x = 144 – 5y$ $x = 147 – 5y$

$y + 5.(141-5y) = 94$ $y + 5.(144 – 5y) = 96$ $y + 5.(147 – 5y) = 98$

$705 –24y = 94$ $720 – 24y = 96$ $735 – 24y = 98$

$24y = 611$ $24y = 624$ $24y = 637$

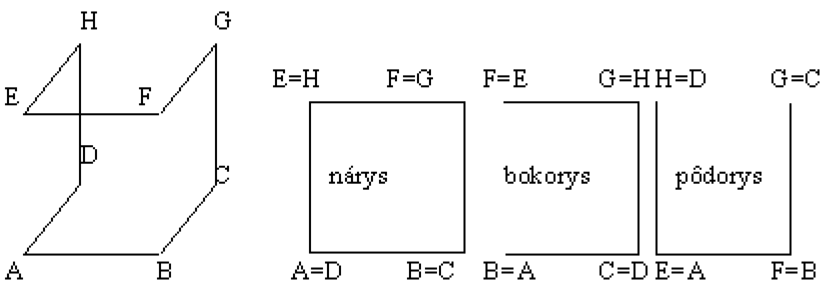
611 a 637 sú nepárne čísla, takže tam riešenie určite nebude. Z varianty B vychádza $y = 624 / 24 = 26$. Potom $x = 144 – 5.26 = 14$. Na začiatku mali deti 144 grošov (14 grošov a 26 5grošov), ostalo im 96 grošov (26 grošov a 14 5grošov).

Príklad 10:

Pri pohľade spredu na drôtený predmet vidíme všetky hrany okrem tých ktoré “smerujú spredu dozadu”. Takže uvidíme hrany AB, EF, CG a DH.

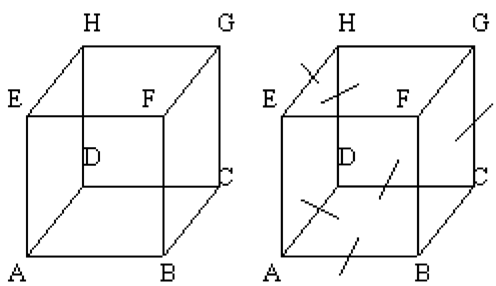
Pri pohľade z pravého boku, neuvidíme hrany, ktoré smerujú zľava doprava. Uvidíme BC a AD ako jednu, FG a EH tiež ako jednu a CG a DH tiež ako jednu.

Pri pohľade zhora neuvidíme hrany idúce zhora nadol. Uvidíme EF = AB, EH = AD, FG = BC.

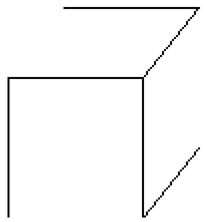


Príklad 11:

Ak v niektorom obraze vidíme hranu, znamená to že aspoň jednu z dvoch možných hrán, ktoré sa v danom pohľade prekrývajú môže teleso mať. Keď sa v pohľade hrana nenachádza, vieme s istotou povedať, že v danej časti teleso nemá žiadnu hranu.



Keď zoberieme celú kocku, môžeme postupne vylučovať hrany, ktoré naše teleso určite nemá. Z nárysu sú to hrany AB, CD, z bokorysu hrany CG, DH a z pôdorysu hrany EH a AD. Ostane teleso ako na obrázku.



Toto teleso má požadované nákresy a ľahko sa môžete presvedčiť, že keby sme mu odobrali ľubovolnú hranu, zmenil by sa aspoň jeden z nákresov.

Príklad 12:

```
    8 4 5 2 8
+ 3 7 1 3 4


1 2 1 6 6 2
```

Tento príklad bol len na precvičenie zručnosti