PIKOMAT, 16. ročník šk. rok 1998/99

Vzorové riešenia 3. série zimnej časti

Príklad 1:

tento príklad možno bol problematický hlavne pre tých, ktorí nepochopili zadanie. Úlohou bolo zistiť dráhu pohybu dvoch bodov na kosoštvorci, pričom tri strany kosoštvorca sa voľne pohybovali v rovine. To znamená, že tí, ktorí úlohu riešili rotáciou kosoštvorca v priestore okolo strany AB, nepochopili zadanie. Kosoštvorec mal meniť svoj tvar pri rôznych uhloch *alfa*, ktoré zviera strana AB so stranou AD. Tak zadanie je jasné, teraz k riešeniu.

S bodom D to bolo jednoduché. Keďže sa nachádza na konci úsečky, ktorá nemení svoju dĺžku a otáča sa okolo bodu A, bod D nemá inú možnosť ako pohybovať sa po kružnici k(A, x), pričom x = ″AB″, pretože strany kosoštvorca sú aké? No rovnaké. A čo s bodom P? Bod P sa po celý čas pohybu kružnice nachádza na úsečke CD, ktorá je rovnobežná s úsečkou AB, a navyše po celý čas je od bodu D vzdialený o jednu tretinu dĺžky x. To znamená, že sa pohybuje po takej istej dráhe ako bod D, len vždy je od neho o tretinu dĺžky x napravo. Teda bod P sa pohybuje po kružnici m(E, x), pričom E je bod ležiaci v jednej tretine úsečky AB.

Príklad 2:

V prvom rade si musíme uvedomiť, kedy Martin určite vyhrá. Bude to vtedy, keď nebude mať obor ani jeden moťný postup, ktorý by mu umoťnil vyhrať. Ak by mal obor čo i len jeden moťný postup, ktorým by mohol vyhrať a hral by rozumne, nemal by Martin šancu. Preto budeme musieť prešetriť všetky možnosti vývoja hry. Začnime teda možnosťou, že Martin si zoberie kartičku číslo 1.

Martin musí povedať 0, k tomu obor pripočíta 2 alebo 3, Martin pripočíta 1, obor pripočíta 2 alebo 3..., obor má vždy 2 možnosti ťahu, Martin vždy len jednu. Zapíšeme priebeh hry do tabuľky:

Martin	obor	Martin	obor	Martin	obor
0	+2=2	+1=3	+2=5	+1=6	+2=**8**
					+3=**9**
			+3=6	+1=7	+2=**9**
					+3=**10**
	+3=3	+1=4	+2=6	+1=7	+2=**9**
					+3=**10**
			+3=7	+1=**8**	

Vidíme, že v 1 prípade vyhrá Martin, ale len vďaka tomu, že obor predtým urobí chybu.

Pozrime sa teda na prípad, keď má Martin kartičku s číslom 2:

Martin	obor	Martin	obor	Martin	obor	Martin
0	+1=1	+2=3	+1=4	+2=6	+1=7	+2=**9**
					+3=**9**	
			+3=6	+2=**8**		
	+3=3	+2=5	+1=6	+2=8		
			+3=**8**			

Tak tu to vyzerá nádejnejšie, ale stále záleží len na obrovom rozmare, či Martin vyhrá alebo prehrá.

Ostáva nám prešetriť poslednú možnosť - Martin si vyberie kartičku s číslom 3:

Martin	obor	Martin	obor	Martin
0	+1=1	+3=4	+1=5	+3=**8**
			+2=6	+3=**9**
	+2=2	+3=5	+1=6	+3=**9**
			+2=7	+3=**10**

Tak predsa! Nech obor robí, čo chce, v každom prípade vyhrá Martin - ak si vyberie kartičku s číslom 3.

Príklad 3:

Nech sa rok začína 1. januára 1998 v pondelok. Budeme si všímať, aký zvyšok po delení 7-mi dávajú nedele v jednotlivých mesiacoch. V januári to bude zrejme 0 (týždeň má 7 dní a prvá nedeľa je 7. januára). Vo februári to bude 4 (31:7=4 zv. 3 - teda 31. januára bude streda, 1. februára - štvrtok, 2. - piatok, 3. - sobota, 4. - nedeľa). Tu sa nám však úloha rozdeľuje na dve. Pretože vo februári môže byť 28 dní (nepriestupný rok) alebo 29 dní (priestupný rok). V marci to bude 4 (28 : 7 = 4 zv. 0 + 4 z februára = 4).

0 0+4=5 4+0=4 4+4=8ş1 1+5=6 6+4=10ş3 3+5=8ş1 1+4=5 5+4=9ş2 2+5=7ş0 0+4=4 4+5=9ş2

0 0+4=5 4+6=10ş3 3+4=7ş0 0+5=5 5+4=9ş2 2+5=7ş0 0+4=4 4+4=8ş1 1+5=6 6+4=10ş3 3+5=8ş1

ş - týmto znakom označujem to, že číslo pred dáva rovnaký zvyšok po delení siedmimi ako číslo za

Dostali sme dva reťazce čísiel, prvý 044163152042 pre nepriestupný rok a druhý 043052041631 pre priestupný rok. V prvom sú 3 štvorky. To znamená že sú tam 3 mesiace, v ktorých nedeľa dáva rovnaký zvyšok po delení siedmimi. Potom však i piatky v týchto mesiacoch dávajú rovnaký zvyšok po delení siedmimi. Keďže ani v jednom reťazci čísiel sa nenachádzajú 4 rovnaké číslice, najviac môžu byť len 3 piatky, ktoré budú dávať rovnaký zvyšok po delení siedmimi (v našom príklade 13 : 7 = 1 zv. 6). A to že naozaj existuje rok, v ktorom 3 piatky dávajú zvyšok po delení siedmimi dávajú 6 zistíme tak, že sa pozrieme do kalendára. A naozaj tento rok 1998 (nepriestupný) má 3 piatky trinásteho (v mesiacoch rovnako, ako sú 4-ky) vo februári, marci a novembri.

Príklady 4, 5:

Ak má platiť, že násobenie čísla 8 znamená presunutie poslednej číslice na prvé miesto, musí prvá číslica byť 1, lebo 8 násobok iných čísel je väčší než 10. Ak je prvá číslica 1, posledná musí byť 8 alebo 9 (ak druhá číslica + 8 dáva zvyšok 1). Vyskúšame obe možnosti : budeme násobiť číslo 8, zapisovať dole výsledok a tak dopĺňať číslo, ktoré delíme 8, až kým nám nevyjde dole znovu posledná cifra, a hore bude 1. Napr.:

x..........8 x.........48
8 8 atď.

...........4 88

a. pre 8 nám vyjde : 1 012 658 227 848
b. a pre 9 : 1 139 240 506 329

Existuje aj úplne krátke číslo, ktoré tomuto vyhovuje: je to 0.

Treba si uvedomiť, že ak by sme pokračovali v násobení čísla *a.* a prepísali by sme znovu 8, získali by sme ďalšie číslo, pre ktoré to platí, takých čísiel je nekonečne veľa : dajú sa znázorniť v tvare

$$\underbrace{1\ 012\ 658\ 227\ 848\ldots\ldots 1\ 012\ 658\ 227\ 848}_{\text{n-krát}}$$

Podobne získame aj všetky riešenia pre prípad, keď je posledná číslica 9.

Príklady 6, 7:

- Rozdelím zápalkové čísla do skupín podľa počtu zápaliek, ktoré potrebujem na ich vyhotovenie

Počet zápaliek	**(1)**	**(2)**	**(3)**	**(4)**		**(5)**			**(6)**		**(7)**	**(8)**
Čísla	0	1	7	4	2	3	5	6	9	0	8	0

- Vypíšem všetky rozklady čísla 8 pomocou **(2), (3), (4), (5), (6)** zápaliek (**(7)** už nie – neexistuje číslo zložené z práve jednej zápalky).
- Do druhého stĺpca vypíšem čísla, ktoré použijem.
- Do tretieho všetky kombinácie (ak je tam použitých **(6)** alebo **(5)**, tak len s jednou z možných cifier a to pre **(6)** so 6 a pre **(5)** s 5).
- Do štvrtého stĺpca počet všetkých kombinácií (pre **(6)** a **(5)** so všetkými ciframi 6, 9, 0 a 2, 3, 5. Pre **(6)** odčítam počet čísel začínajúcich na 0, lebo žiadne prirodzené číslo nulou nikdy nezačíname).
- V spodnom riadku tabuliek sú výsledné súčty.

TAB A

Rozklad č. 8	Použité cifry			Kombinácie	Počet
(2) + **(6)**	1	6, 9, 0		16, 61	2.3 - 1 = **5**
(3) + **(5)**	7	2, 3, 5		75, 57	2.3 = **5**
(4) + **(4)**	4	4		44	**1**
(2) + **(2)** + **(4)**	1	1	4	114, 411, 141	**3**
(2) + **(3)** + **(3)**	1	7	7	177, 717, 771	**3**

(2) + (2) + (2) + (2)	1	1	1	1	1111	**1**
Celkový počet čísel z 8 zápaliek						**<u>19</u>**

TAB B

Rozklad č. 12	Použité cifry						Kombinácie	Počet
(5) + **(7)**	2, 3, 5			8			85, 58, 38, 83, 28, 82	**6**
(6) + **(6)**	6, 9, 0			6, 9, 0			69, 66, 60, 96, 99, 90	**6**
(2) + **(3)** + **(7)**	1		7		8		178, 718, 781, 187, 871, 781	**6**
(2) + **(4)** + **(6)**	1		4		6, 9, 0		(146, 461, 641, 164, 416, 614) x 3 – 2	**16**
(2) + **(5)** + **(5)**	1		2, 3, 5		2, 3, 5		(123, 321, 213, 221, 122, 132, 231, 312, 212) x 3	**27**
(3) + **(3)** + **(6)**	7		7		6, 9, 0		(776, 677, 767) x 3 – 1	**8**
(3) + **(4)** + **(5)**	7		4		2, 3, 5		(745, 475, 574, 754, 457, 547) x 3	**18**
(4) + **(4)** + **(4)**	4		4		4		444	**1**
(2) + **(2)** + **(3)** + **(5)**	1	1	7	2, 3, 5			(1175, 1157, 1751, 5117, 7511, 5711, 1517, 1715, 7115, 7151, 5171, 1571) x 3 – 2	**36**
(2) + **(2)** + **(4)** + **(4)**	1	1	4	4			1144, 1414, 1441, 4141, 4411, 4114	**6**
(2) + **(3)** + **(3)** + **(4)**	1	7	7	4			1774, 1477, 1747, 7714, 7471, 7417, 4771, 4177, 4717, 7741, 7174, 7147	**12**
(2) + **(2)** + **(2)** + **(6)**	1	1	1	6, 9, 0			(1116, 1611, 1161, 6111) x 3 – 1	**11**
(3) + **(3)** + **(3)** + **(3)**	7	7	7	7			7777	**1**
(2) + **(2)** + **(2)** + **(2)** + **(4)**	1	1	1	1	4		11114, 11141, 11411, 14111, 41111	**5**
(2) + **(2)** + **(2)** + **(3)** + **(5)**	1	1	1	7	7		11177, 11771, 17171, 71117, 71711, 11717, 17117, 17711, 71171, 77111	**10**
(2) + **(2)** + **(2)** + **(2)** + **(2)** + **(2)**	1	1	1	1	1	1	111111	**1**
Celkový počet čísel z 12 zápaliek								**<u>170</u>**

Príklady 8:

Najprv zistíme, aké veľké budú časti (t.j. aký bude v nich súčet). Keďže súčet všetkých políčok je rovný 1+ 2 + ... + 9, čo je rovné 45, každá časť bude mať súčet 45 : 3 = 15. Teraz poďme rozdeľovať. Začnime napr. od stredu, t.j. od čísla 9. Ďalej máme 4 možnosti, ktoré zo 4 susedných políčok bude s číslom 9 v jednej časti.

1. Pripojíme číslo 1. Takže máme zatiaľ súčet rovný 10 a do 15 nám chýba ešte 5. To môžeme dosiahnuť takto:

a. pripojíme číslo 5, ale potom nie je časť súvislá
b. pripojíme čísla 1 + 4, ale číslo 1 už máme použité
c. pripojíme čísla 2 + 3, ale tým sa nám platňa rozpadne na 4 časti, čo je veľa.

Ďalšie možnosti nie sú.

2. Pripojíme číslo 2. Súčet je 11, chýba nám 4:

a. pripojíme číslo 4. Zvyšné políčka môžeme na 2 časti rozdeliť tak, aby v každej bol súčet rovný 15, práve jedným spôsobom: 7 + 3 + 5 a 6 + 8 + 1.
b. pripojíme čísla 1 + 3, ale opäť sa nám platňa rozpadne na 4 časti.

Ďalšie možnosti nie sú.

3. Pripojíme číslo 3. Súčet je 12, chýba ešte 3:

  a. pripojíme čísla 1 + 2, platňa sa nám opäť rozpadne na 4 časti.

Pripojiť číslo 3 druhýkrát nemôžeme, takže ďalšie možnosti nie sú.

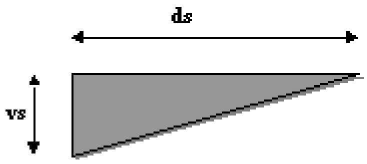
4. Pripojíme číslo 6. Súčet je rovný 15, takže len zvyšok platne rozdelíme na 2 časti, a to týmto spôsobom: 7 + 3 + 5 a 2 + 4 + 1 + 8.

Keďže sme vyčerpali všetky možnosti, dostali sme dve takéto riešenia:

```
┌─────┐ ┌─────┐
│7 3 5│ │7 3 5│
├───┬─┤ ├─┬───┤
│2 9│8│ │2│9 8│
│ ┌─┘ │ │ └───┤
│4│1 6│ │4 1 6│
└─┴───┘ └─────┘
```

Príklad 9:

Priemer veže d = 20 m.
Výška veže v = 100 m.
Počet otočení p = 6 x
Výška schodu vs = 25 cm = 0,25 m.



Počet schodov ps = ?
Dĺžka schodiska dd = ? m.
Dĺžka schodu ds = ? m.

Počet schodov dostaneme ľahko zo vzťahu:
ps = v / vs (výška veže / výška schodu)
ps = 100 / 0,25 = 400
Dĺžka schodiska meraná pri stene veže je:
dd = p . Π . d (počet otáčok . obvod veže)
dd = 376,8 m
Ale keď už máme dĺžku schodiska a počet schodov, dĺžka jedného schodu je jednoduchý vzťah:
ds = dd / ps (dĺžka schodiska / počet schodov)
ds = 376,8 / 400 = 0,942 m.
Dĺžka jedného schodu je 0,942 m, čo je 94,2 cm.

Príklad 10:

Ujasnime si, že chodbou môžu prechádzať najviac dvaja ľudia naraz, takže jeden človek alebo dvojica, pričom musia mať pri sebe fakľu.

Zamerajme sa na dvojicu Zora + Nika. Keďže obe sú pomalšie, ako chlapci, mali by ísť spolu. Ak by spolu nešli, mali by sme aspoň jeden prechod trvajúci 10 minút a aspoň jeden prechod trvajúci 5 minút. Ak pôjdu spolu (a to len jedenkrát), budeme mať iba jeden 10 minútový prechod. Kvôli šetrnosti s časom chceme, aby šli len raz, z čoho nám vyplýva, že ani jedna z nich sa nevráti s fakľou, čiže nepôjdu ako prvá, ani ako posledná dvojica. Z toho vyplýva, že prvá aj posledná dvojica musí byť Peter + Martin. Z týchto faktov už vieme vytvoriť spôsoby prechodov chodbou:

			čas 1.	**čas 2.**
1.	Martin + Peter	idú hore	2 min.	2 min.
2.	Martin	ide dole	2 min.	
	alebo			
	Peter	ide dole		1 min.
3.	Zora + Nika	idú hore	10 min.	10 min.
4.	Peter	ide dole	1 min.	

			čas 1.	čas 2.
	alebo			
	Martin	ide dole	2 min.	
5.	Martin + Peter	idú hore	2 min.	2 min.
	Súčet		17 min.	17 min.

A tým máme jednoznačne vyriešený príklad.

Príklad 11:

Povedzme si najprv, že Biela čarodejnica hovorí pravdu a uvidíme, čo nám výjde. Podľa zadania Anabelka má byť v 1. miestnosti. Takže dajme Anabelku do 1. miestnosti. Ďalej majú byť obri v 2. miestnosti, tak dajme niekoľkých obrov do 2. miestnosti (pozor! čarodejnica nehovorila nič o tom, že v 2. miestnosti musia byť *všetci* obri.). Obri majú byť s Anabelkou, tak dajme niekoľkých obrov k Anabelke do 1. miestnosti. A napokon, v 3. miestnosti má byť viac osôb ako v 2. miestnosti, takže dajme do 3. Miestnosti toľko obrov, aby ich bolo viac ako v druhej. Hotovo, všetky tvrdenia sú teda pravdivé a vyšlo nám riešenie: ak čarodejnica hovorila pravdu, Anabelka je v 1. miestnosti s obrami.

No a teraz ešte rozoberme situáciu, keď čarodejnica klame (aj to sa môže stať). Takže teraz si všetky jej tvrdenia znegujeme (všetky pôvodné sú nepravdivé):

1. Anabelka nie je v 1. Miestnosti (t.j. musí byť v 2. alebo v 3. miestnosti, nie v oboch naraz)
2. Obri nie sú v 2. Miestnosti (t.j. môžu a nemusia byť v 1. alebo 3. miestnosti, aj v oboch, alebo nikde)
3. Obri nie sú s Anabelkou v jednej miestnosti.
4. V 3. miestnosti nie je viac osôb ako v 2. miestnosti, t.j. v 3. miestnosti je menej alebo rovnako osôb ako v 2. miestnosti.

Tak si poďme teraz umiestnit Anabelku do 2. alebo 3. miestnosti:

a. Ak by bola Anabelka v 2. miestnosti, nebola by s obrami, lebo podľa predpokladov nemôžu byť obri v 2. miestnosti, čo by sedelo. Ďalej ale má byť v 3. miestnosti menej alebo rovnako osôb ako v 2. miestnosti, čiže menej alebo rovné ako 1, čiže 0 alebo 1, čiže v 3. miestnosti môže ale nemusí byť maximálne 1 obor. A napokon v 1. miestnosti môžu alebo nemusia byť zvyšní obri (o tom, že by tam nejakí obri museli byť, žiadny predpoklad nehovorí). Takže sme dostali výsledok - Anabelka je v 2. miestnosti bez obrov.
b. Ak by Anabelka bola v 3. miestnosti, v 2. miestnosti by muselo byť viac alebo rovnako osôb ako v 3. miestnosti, čiže viac alebo rovné ako 1, čiže by tam musel byť aspoň 1 obor, čo je ale v spore s podmienkou, že v 2. miestnosti nemôžu byť obri.

Výsledok: Ak čarodejnica hovorila pravdu, Anabelka je s obrami v 1. miestnosti. Ak klamala, Anabelka je v 2. miestnosti bez obrov. Bohužiaľ, zo zadania sa nedalo zistiť, či čarodejnica klame, alebo hovorí pravdu.

Príklad 12:

Označme si množstvo divozelu D, ľubovníka L, a myšieho chvostíka M. Zo zadania vyplýva, že D, L, M sú prirodzené čísla (celé a kladné) a
(1) D + L + M = 11.
Na základe cien jednotlivých bylín a ceny za 1kg zmesi môžeme zostaviť ďalšiu rovnicu:
(2) 13D + 14L + 17M = 15 . 11 = 165
Posledný zo zadania známy fakt je M>L.

Na základe týchto skutočností musíme teda zistiť D, L a M. Postupujme takto:
Z (1) vyjadrime napr. L:
L = 11 - D - M
a dosaďme do (2)
13D + 14(11 - D - M) + 17M = 165, po úpravách dostaneme rovnicu D = 3M - 11. Teraz už môžeme hľadať riešenie pomocou tabuľky: M bude postupne 4, 5, 6, … (Menšie ako 4 byť nemôže, lebo D by bolo záporné.), D a L vieme vypočítať:

M	4	5	6	7
D=3M-11	1	4	7	…
L=11-D-M	6	2	…	

Z tabuľky vidieť, že M nemôže byť 6 a viac, lebo L by bolo záporné číslo. Existujú teda 2 celočíselné kladné riešenia spĺňajúce rovnice (1) a (2). Z nich však iba druhé spĺňa poslednú podmienku, a síce M>L. Takže jediným riešením je M = 5, D = 4 a L = 2. Zmes treba namiešať z 5kg myšieho chvostíka, 4kg divozelu a 2kg ľubovníka.