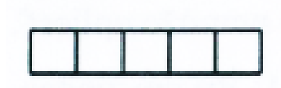
PIKOMAT, 15. ročník šk. rok 1997/98
Vzorové riešenia 1. série letnej časti

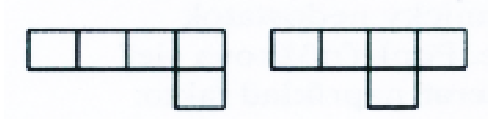
1. príklad

Pri tejto úlohe bolo potrebné "pohrať sa" s kreslením štvorčekov a pritom zvoliť taký postup, aby sme na žiaden kúsok pentominovej skladačky nezabudli. Vhodný je napríklad takýto postup:

a) základ (pod tým sa rozumejú štvorčeky ležiace za sebou v rade) tvorí 5 štvorčekov

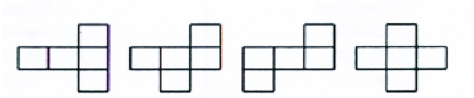


b) základ tvoria 4 štvorčeky, posledný piaty prikresľujeme:

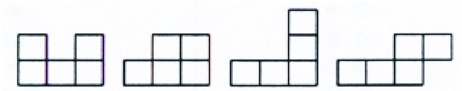


(ak by sme piaty štvorček presunuli kdekoľvek inde, vždy by sme dostali už nájdenú skladačku)

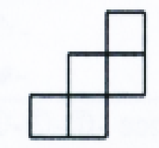
c) základ tvoria 3 štvorčeky
- zvyšné dva štvorčeky sú v opačných polrovinách vzhľadom na základ:



- zvyšné dva štvorčeky ležia v rovnakej polrovine vzhľadom na základ:
(pri každej kresbe treba dávať pozor, či už taká nebola, len inak pootočená)



d) základ tvoria 2 štvorčeky:



(treba zabezpečiť, aby sa nevyskytli 3 alebo viac štvorčekov v jednom rade či stĺpci - taká skladačka je už iste nakreslená)

e) o základe 1 štvorček nie je potrebné hovoriť, lebo vždy je vedľa neho aspoň z jednej strany aspoň jeden štvorček, a taký prípad je už rozobratý

Spolu teda existuje 12 rôznych pentominových skladačiek. A z toho samozrejme poľahky zistíme, že náš milý pavúčik mal 12 milimetrov.

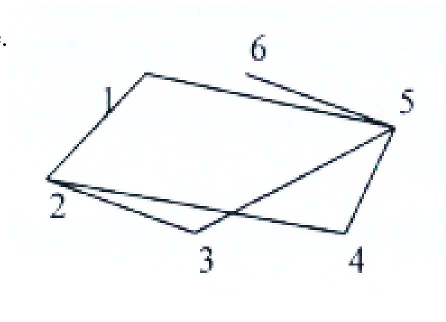
2. úloha

Hneď na začiatku príkladu odhalíme, že pri takom rozdelení vlákien, aké vymyslel Popleťnôžka pri sieťach 2 a 3, siete nakresliť nejdú.

SIEŤ 2: Predstavme si sieť. Každé vlákienko z nejakého bodu vychádza a do nejakého bodu vchádza, čiže v podstate vychádza z dvoch bodov. A teda, ak spočítame spolu počty vlákienok, ktoré vychádzajú z bodov 1až 6, bude v tomto súčte každé vlákienko započítané dva krát. A tak súčet, ktorý dostaneme, musí byť deliteľný dvomi (pri predelení dvomi dostaneme počet vlákienok tvoriacich sieť). Po bližšom pozretí sa na zúbky takémuto súčtu pri sieti č.2 zistíme, že je rovný 17 ($2 + 3 + 2 + 2 + 4 + 4 = 17$) a to znamená, že sieť nakresliť nejde, pretože niektoré vlákenko by síce vychádzalo z nejakého bodu, ale do žiadneho by nevchádzalo.

SIEŤ 3: Popleťnôžka nemôže z jedného bodu naraz do dvoch viesť dve rôzne vlákna, aby sieť vyhovovala podmienkam. Potom z jedného bodu smie viesť najviac 5 vlákien, pretože okrem tohto bodu existuje ešte ďalších päť bodov. Zo šiesteho bodu mal viesť 7 vlákien a to sa podľa Popleťnôžkových kritérií nedá, pretože taká sieť by ho tlačila, a tak ju ani nemôže upliesť.

A teraz späť k SIETi 1: Pri nej žiaden takýto technický nedostatok nanájdeme. Popleťnôžkova sieť mohla vyzerať napríklad takto:



3. úloha

Číslo	*Pôvodné*	*Vymenené*
1a	-①-②-	-♥-①-④-
1b	-①-②-	-☆-①-⑤-
2	-♥-②-	-②-♥-
3	-⑤-♥-	-♥-⑤-
4	-☆-②-	-②-☆-
5	-⑤-☆-	-☆-⑤-
6	-④-③-	-②-♥-③-
7	-⑤-③-	-②-☆-③-
8	-④-☆-	-☆-④-
9	-④-♥-	-♥-④-

①②③④⑤

Na začiatku máme za sebou navlečené mince -①-②-③-. Keď si pozrieme tabuľku, zistíme, že môžme využiť len výmenu 1a) alebo 1b). Využime 1a). Potom jediné,čo môžeme urobiť, je použiť 6).

1.krok 1a -♥-①-④-③-

2.krok 6 -♥-①-②-♥-③-

A dostávame sa k pôvodnej situácii. Opäť meníme -①-②- a po výmene (meňme 1a)) dostaneme s využitím 9, 6, 2 toto: -♥-♥-①-②-♥-♥-③-. Keby sme využili 1b, tak namiesto ♥ zasunieme do náhrdelníka ☆ a bude vyzerať takto: -♥-☆-①-②-♥-☆-③- (s využitím 1b,3,7,2). A takto sa vždy dostaneme na „začiatok“, t.j. k výmene -①-②- a záleží na tom, či využijeme 1a) alebo 1b) – dospejeme k zaradeniu ♥ alebo ☆ do náhrdelníka.

Takouto výmenou získame ľubovoľné pravidelné usporiadanie ♥ a ☆ , záleží len na tom, za čo budeme vymieňať -①-②-. (Pravidelné v tom, že vzor sa bude dva krát opakovať.) A keď sa nám už bude zdať náhrdelník dosť dlhý, tak sa jednoducho zbavíme mincí -①-②- a -③- takto: -①-②- darujeme na chrobáčí ples a -③- mravenisku.

Takže teraz k nášmu náhrdelníku: -①-②-③-

1a, 6	-♥-①-②-♥-③-
1a, 6, 9, 2	-♥-♥-①-②-♥-♥-③-
1b, 2x3, 7, 2x2	-♥-♥-☆-①-②-♥-♥-☆-③-
1a, 2x9, 8, 6, 4, 2x2	-♥-♥-☆-♥-①-②-♥-♥-☆-♥-③-
1a, 2x9, 8, 9, 6, 2, 4, 2x2	-♥-♥-☆-♥-♥-①-②-♥-♥-③-
1b, 2x3, 5, 2x3, 7, 2x2, 4, 2x2	-♥-♥-☆-♥-♥-☆-①-②-♥-♥-☆-♥-♥-☆-③-

Teraz darujeme -①-②- a -③- a náhrdelník je hotový.

4. úloha

Tak tento príkladík veru vôbec nebol jednoduchý. Pri riešení sa musíme držať troch podmienok:
1.) obvod trojuholníka so stranami a,b,c je 990, teda $a + b + c = 990$
2.) trojuholníky sú pravouhlé, teda platí Pytagorova veta: $a^2 + b^2 = c^2$
3.) musí platiť trojuholníková nerovnosť: $a + b > c \quad a + c > b \quad b + c > a$

Z podmienky $a + b > c$ vyplýva (nech c je prepona), že strana c musí byť menšia než 495, teda $c < 495$ a podobne zo zvyšných dvoch podmienok $a + c > b$, $b + c > a$ vyplýva $a < 495$, $b < 495$. Navyše, aby c bola prepona, musí byť väčšia ako 330, t.j. $c > 330$ (ak $a = b = c = 330$, trojuholník je rovnostranný). Z toho takisto pre odvesny plynie, že aspoň jedna z nich je menšia než 330.

Zatiaľ som získala podmienku $330 < c < 495$ a podmienku $a < 495$, $b < 495$, tiež buď a alebo $b < 330$ (kratšia z odvesien).

Teraz využijem podminenky 1.) a 2.). Po dosadení získam:

$$a + b + c = 990$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$a^2 + b^2 = (990 - a - b)^2$$
$$a^2 + b^2 = 990^2 - 990a - 990b - 990a + a^2 + ab - 990b + ab + b^2$$
$$0 = 990^2 - 1980a - 190b + 2ab$$
$$2^2.495^2 = 1980b + 1980a - 2ab$$
$$2.495^2 = 990a + 990b - ab$$
$$2.495^2 = 990a - b.\ (990 - a)$$
$$b = (2.495^2 - 990a)/(990 - a) = 990\ .\ (495 - a) / (990 - a)$$

aby som zlomok ešte zjednodušila, nech a = x.11. Potom:

$$b = 90.11.(45.11 - x.11) - / (90.11 - x.11) = 90.11.(45 - x)/(90 - x) =$$
$$= 2.3^2.5.11.(45 - x) / (90 - x)$$

Teraz musíme upraviť našu podmienku "odvesna" < 495 vzľadom na x, t.j. x.11 < 495, čiže x < 45. Ďalej vieme, že b musí byť celé číslo, teda musíme postupne vyskúšať za x dosadiť čísla od 1 do 45 a vyskúšať, pre ktoré x bude zlomok $2.3^2.5.11.(45 - x) / (90 - x)$ celé číslo.

Získam tieto riešenia:	x =	9	15	24	35	36	40
To je postupne:	**b =**	**440**	**396**	**315**	**180**	165	99
Pre a = x.11 získam:	**a =**	**99**	**165**	**264**	**385**	396	440
c dopočítam ako 990 - a - b :	**c =**	**351**	**429**	**411**	**425**	429	351

Posledné dva stĺpce sú vlastne len zopakovaním prvých dvoch, takže celkom existujú štyri riešenia.

Mnohí z Vás úlohu riešili pomocou "vzorcov" pre Pytagorejské trojuholmíky, napríklad:

$a = 2n + 1$
$b = 2n^2 + 2n$
$c = 2n^2 + 2n + 1,\ n \in N$

Žiaľ, takéto predpisy nezahŕňajú všetky pytagorejské trojuholníky (overte si), takže Vám potom niektoré riešenia chýbali.

Pekný bol aj nápad hľadať tieto trojuholníky ako násobky známych pytagorejských trojuholníkov 3,4,5 a 5,12,13 - zafungovalo to pre 33-násobok trojuholníka 5,12,13 (jeho obvod je 30 a to je 990 : 33). takto ste získali jedno riešenie 165, 396, 429. Tento postup však tiež neodhalí všetky riešenia, lebo všetky pytagorejské trojuholníky nie sú len násobkami týchto dvoch známych trojuholníkov (vyskúšajte si to pre naše riešenia).

5. úloha

Nezamýšľajme sa hneď nad konkrétnymi číslami, ktoré sú v úlohe, ale pozrime sa na problém všeobecnejšie. Hranica n-uholníka je uzavretá krivka, a keďže každé dve susedné sú na seba kolmé (jedny sú vodorovné a druhé zvislé), musia sa striedať za sebou: vodorovná, zvislá, vodorovná, zvislá, vodorovná,…

Ak by sme vzali hocijaký z n-uholníkov a začali by sme takto postupne menovať u strany, ktorá by bola napríklad vodorovná, skončili by sme pri uzavretí hranice zvislou stranou (veď susedná strana vodorovnej môže byť iba zvislá). Teda naše menovanie by vyzeralo takto: vodorovná, zvislá, vodorovná, zvislá, … , vodorovná, zvislá.

A z toho je jasné, že vodorovných strán je rovnaký počet ako zvislých a teda počet všetkých strán spolu bude k + k = 2k a to je párne číslo. Preto môžeme zostrojiť len také n-uholníky vyhovujúce Žofkiným podmienkam, pre ktoré platí, že n je párne číslo (musia to ale byť najmenej štvoruholníky – dve úsečky by totiž nevytvorili uzavretú hranicu).

Teraz musíme ešte ukázať, že je možné zostrojiť taký n-uholník pre každé párne n.

Dôkaz je jednoduchý: Majme štvorec. „Vyrezaním" hociktorého z rohov pridáme ďalšie dve strany (pozri obrázok). A keby sme na tomto 6-uholníku vyrezali zase ďalší roh, dostaneme opäť o dve strany viac, a teda 8-uholník. Takto môžme pokračovať ďalej a ako dlho chceme a vždy pribudnú dve strany. A tým je dokázané, že pre všetky párne n väčšie ako 4 sa dá nakresliť n-uholník vyhovujúci zadaniu.