PIKOMAT, 15. ročník šk. rok 1997/98

Vzorové riešenia 3. série letnej časti

1.úloha

Vzorové riešenie tejto úlohy je na samostatnom papieri spolu s riešením úlohy s pentominom z 2. série. Takže ak si tieto úlohy ešte nevyriešil(a) a ešte to nechceš vzdať, odlož si ich na neskôr. Tu Ti len prezradím, že sa dá ohraničiť plocha s obsahom až 128 štvorčekov.

2.úloha

Zo zadania vieme, že uhly v α ABC sú postupne α, α, 2α. Teda platí: $\alpha + \alpha + 2\alpha = 180^{o}$, z čoho je jasné, že $\alpha = 45^{o}$. Trojuholník ABC je teda rovnoramenný pravouhlý – má vnútorné uhly s hodnotami 45^{o}, 45^{o} a 90^{o}. Zo zadania ďalej platí: D je stred AC, $|BD| = \sqrt{5}$. Potom pre ΔBCD môžme šikovne využiť Pytagorovu vetu (nech $|BC| = a$)

$$a^2 + (a / 2)^2 = (\sqrt{5})^2$$
$$(5 / 4)\, a^2 = 5$$
$$a^2 = 4$$
$$a = 2$$

Úloha sa dá teraz pekne vyriešiť niekoľkými spôsobmi – uvediem dva:

a) *(táto úvaha platí v ľubovoľnom trojuholníku a zodpovedá vášmu – v ani jednom prípade však zdôvodnenému riešeniu r =* ***S*** */ (a + b + c) / 2).*

Označme S - stred vpísanej kružnice, $\mathbf{S} = S\Delta_{ABC}$, $\mathbf{S_1}=S\Delta_{ABS}$, $\mathbf{S_2}=S\Delta_{ACS}$, $\mathbf{S_3}=S\Delta_{BCS}$. Označme stred kružnice vpísanej trojuholníku S. Celý Δ ABC sa takto rozpadne na tri menšie trojuholníky: ΔABS, ΔACS, ΔBCS. Čo majú tieto tri trojuholníky spoločné? Všetky majú rovnakú výšku, je to r. A to je výborné, len dať tie "r" nejako dokopy. Naše "r" vystupuje pri výpočte obsahu každého z trojuholníkov a navyše obsah týchto troch trojuholníkov dokopy je obsah celého ΔABC. Napísané prehľadnejšie:
$\mathbf{S} = \mathbf{S_1} + \mathbf{S_2} + \mathbf{S_3}$ = r.c / 2 + r.b / 2 + r.c / 2 = r.(a + b + c) / 2 Ţ r = 2 **S** / **o** , kde **o** = a + b + c

(obsah ΔABC ako súčtu troch menších, obsah každého z menších zo vzťahu $a.v_a / 2$ – polomer vpísanej kružnice je vždy kolmý na príslušnú stranu)
$\mathbf{S} = \mathbf{S_1} + \mathbf{S_2} + \mathbf{S_3}$ = r.a.√2 / 2 + r.a / 2 + r.a / 2 = r.a.(2 + √2) / 2

(výpočet v našom konkrétnom trojuholníku)
S = a.a / 2 = $a^2 / 2$

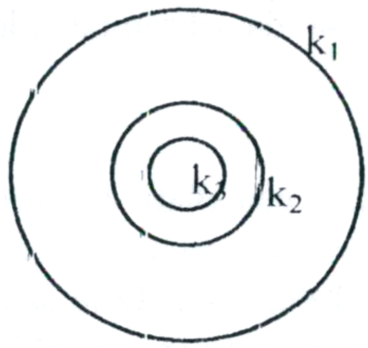
(obsah ΔABC zo vzťahu $a.v_a / 2$)
$a^2 / 2$ = r.a.(2 + √2) / 2

(využitie rovnosti obsahov)
4 = 2r (2 + √2) Ţ r = 2 / .(2 + √2) = 2 - √2

b) Keď sa obrázku bližšie prizrieme, je jasné, že tg α / 2 = r : ˝AB˝ / 2 Ţ r = tg 22,5°. √2 / 2 = 0,5857864. Je to vďaka tomu, že stred vpísanej kružnice leží v priesečníku osí uhlov (α / 2) a náš trojuholník je rovnoramenný (˝AB˝ / 2).

3. úloha

Prvá vec, ktorá každého napadne je, či nemôže Emanuel letieť priamo ku kľúču. Ale veľmi ľahko sa presvedčíme, že nemôže. Trvalo by mu to totiž 9pl (púpavlistov) / 2 pl/kž (kž - kvapkožblnky) = 4,5 kž, ale lúč sa otočí už za 4 kž. Takže priamo Emanuel letieť nemôže. Ale keď to skúšal, všimol si, že bližšie ku kľúču sa k nemu lúč blížil pomalšie.



k_1: r = 9 kž
v = 2πr / 4 = 9π / 2 pl/kž = 14,14 pl/kž

k_2: r = 2 kž
v = 2πr / 4 = π pl/kž = 3,14 pl/kž

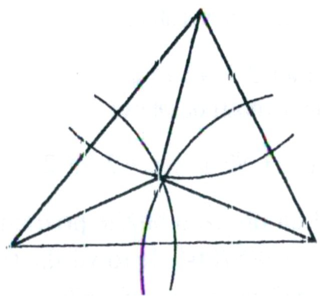
k_3: r = 1 kž
v = 2πr / 4 = π / 2 pl/kž = 1,57 pl/kž

Skutočne, keď sa uhlová rýchlosť lúča nemení, prejde bod lúča, ktorý je bližšie ku stredu menšiu dráhu, vždy 2πr / 4 kž, kde r je vzdialenosť bodu od kľúča v púpavlistoch (pozri obrázok). Bod lúča, ktorý je v strede má dokonca rýchlosť 0 pl/kž. Takže časť lúča (pri kľúči) sa pohybuje pomalšie ako Emanuel. Keby sa Emanuelovi podarilo preletieť smerom ku kľúču až k tejto pomalšej časti, môže potom lietať po kružnici v smere otáčania lúča a tým získať náskok potrebný na to aby stiholdoletieť ku kľúču. Podarí sa mu to? Áno, z obrázku totiž vidíme, že po kružnici k_3 sa lúč pohybuje pomalšie ako Emanuel. Emanuel sáce nestihne doletieť na túto kružnicu - práve ne nej by ho lúč zasiahol, ale stačí mu doletieť aj trochu ďalej od kľúča. Kam presne? Nie je ťažké vypočítať, kde sa lúč pohybuje rovnako rýchlo ako Emanuel. Je to tam, kde platí 2πr / 4 = 2. Po vyriešení tejto rovnice dostaneme r = 4 / π = 1,27 pl. Takže Emanuel môže letieť primo ku kľúču, kým nebude vo vzdialenosti menšej ako 1,27 pl a väčšej ako 1 pl od kľúča. Tam je už lúč pomalší ako on, takže môže letieť po kružnici okolo kľúča a tým sa bude od lúča vzďalovať (alebo ho dobiehať, to závisí od uhlu pohľadu). Podstatné je že bude zväčšovať uhlový rozdiel medzi sebou a lúčom, teda aj čas za ktorý ho lúč dobehne. Keďže sa teraz nachádza niekde medzi 1 a 1,27 kž od kľúča, bude mu určite stačiť čas 1 kž, na to aby doletel ku kľúču. Ak by po kružnici celkom dobehol lúč, získal by náskok až 4 kž, takže sa mu to určite podarí.

4. úloha

a) ostrouhlý Δ

Bod, ktorý je v trojuholníku rovnako vzdialený od všetkých vrcholov je stred opísanej kružnice. Pre ostrouhlý Δ to bude aj bod, v ktorom sa osy stretnú. Prileti doň dokonca naraz. Ak by sme miesto stretnutia niektorým smerom posunuli, skráti sa síce dráha 1 alebo 2 osí, ale tej ďaľšej sa predĺži. Teda pri ostrouhlom Δ je to stred opísanej kružnice.

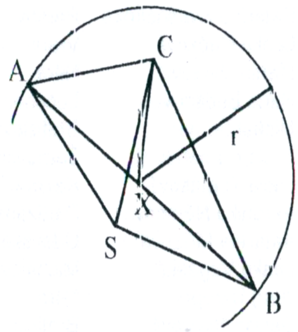


b) pravouhlý Δ

Aj v pravouhlom Δ to bude stred opísanej kružnice – má ale špeciálnu vlastnosť: tvorí stred prepony a je stredom Talesovej kružnice.

c) tupouhlý Δ

V tupouhlom Δ leží stred opísanej kružnice mimo tohoto trojuholníka ako útvaru. Preto by bolo pre osy nevýhodné letieť až doň. Keď poletí osa z vrchola A do bodu X (stred najdlhšej strany), poletí vlastne po odvesne pravouhlého ΔASX – keby letela do S, letí po prepone, čo je dhšia trasa. Taká istá je situácia s osou letiacou z vrchola B. A konečne aj pre osu z C by to



bola dlhšia cesta (pozri obrázok). Preto hľadaný bod umiestnime do stredu najdlhšej strany Δ - v našom prípade strany AB. Tak poletia osy z A,B najmenšiu vzdialenosť akú môžu – ak by bolo miesto stretnutia posunuté niekde smerom “do trojuholníka”, určite to bude aspoň pre jednu z nich dlhšia cesta. A osa z vrchola C to má do stredu protiľahlej strany vždy kratšie ako osy z A,B (rovnako to mala v pravouhlom Δ a teraz určite |CX| < r).

5.úloha

Keď sa pozrieme bližšie na zúbky číslam 34 a 98, zisíme, nasledovné: 34 dáva po delení tromi zvyšok 1 a 98 zvyšok 2. Túto situáciu môžme zapísať takto:

34 = 3.k + 1
98 = 3.m + 2 kde k, m sú celé čísla

(v našom príklade vieme k,m presne určiť – ale to je teraz nepodstatné)

Všetky prirodzené čísla sa dajú podobne napísať vždy ako niekoľkonásobok čísla tri plus zvyšok (ten môže byť pri delení tromi 0,1 alebo 2):

n = 3z
alebo = 3x + 1
alebo = 3y + 2, kde x, y, z sú prirodzené čísla alebo 0

Ak teda p = 3x + 1, potom p + 98 = 3x + 1 + 3m + 2 = 3x + 3m + 3 = 3.(x + m + 1) Ţ číslo je deliteľné tromi a určite nieje prvočíslo.

Ak teda p = 3y + 2, potom p + 34 = 3y + 2 + 3k + 1 = 3y + 3k + 3 = 3.(y + k + 1) Ţ číslo je deliteľné tromi a určite nieje prvočíslo.

Teda naše hľadané prvočíslo nemôže byť ani p = 3x + 1 ani tvaru p = 3y + 2, lebo potom by vždy jedno z čísel p + 34, p + 98 bolo zložené číslo. Ostáva teda možnosť p = 3z. Také prvočíslo je len jedno, a to 3 (pre z > 1 by p už nebolo prvočíslo, ale zložené číslo). Úloha má teda jediné riešenie: hľadaným prvočíslom je číslo 3. Presvedčíme sa ešte skúškou: 3 + 34 = 37, 3 + 98 = 101 a 37 aj 101 sú prvočísla.