

# PIKOMAT, 15. ročník šk. rok 1997/98

## Zadania 2. série zimnej časti

(pokračovanie)

Bod povedal: "Volám sa Kamilko."

Kamilko sa rozlúčil s premennými  $x$ ,  $y$  a parametrom  $p$  a pobral sa ďalej.

Ide Kamilko ďalej, veselo si pohvizduje, až v diaľke zbadá čiaru. Podíde bližšie, aby zistil, čo to je za čiara. Zistil, že nie je celkom rovná, ale trochu zahnutá doľava. Preto si hovorí:

"Priamka to určite nie je, tak teda pôjdem po čiare. Možno ma niekam zavedie."

A tak Kamilko vyskočil na čiaru a poďho po nej. Ide, ide, dlho vykračuje, až stretne bod V. Ale nezastaví sa, pokračuje ďalej, lebo je zvedavý, kam ho čiara zavedie. Takisto stretne body P, Q, C (nie nutne v uvedenom poradí), ale ponáhl'a sa ďalej. Až tu zrazu, div sa svete, opäť príde k bodu V. Zmätený Kamilko sa zastavil, a polohlasne si hovorí:

"Asi som sa niekde otočil a vybral sa naspäť."

Vtedy sa ozval bod V:

"Nevybral si sa naspäť, chodíš dookola po kružnici, hahaha, chichichi!"

A začal sa Kamilkovi posmievať. No Kamilko sa nahneval:

"Odkiaľ mám vedieť, že toto je kružnica. Ty sa smeješ, lebo tu trčíš už neviem odkedy a poznáš to tu. Ale skús ísť do sveta, hneď sa ukáže, aký si múdry!"

"Ja som múdry, aj keď som stále tu!" nedal sa bod V. "Poznám veľmi veľa hádaniek a rébusov, a niektoré nevie vyriešiť nikto, iba ja. A ja som zasa vyriešil všetky, ktoré som počul!"

"Tak poďme súťažiť!", povedal Kamilko. "Uvidí sa, kto z nás dvoch je múdrejší. Ty mne dáš hádanku, ja dám tebe hádanku a víťazom je ten, kto uhádne súperovu hádanku a súper neuhádne tú jeho."

"Ty chceš súperiť so slávnym bodom V, veľacteným priesečníkom výšok trojuholníka ABC, ktoré sú vedené bodmi A, B; váženým bodom V, ktorý spolu s bodom C tohto trojuholníka a ďalej bodmi P, Q, čo sú päty výšok vedených bodmi A, B už spomínaného trojuholníka ABC, ležia na jednej jedinej kružnici; tak ty chceš so mnou súperiť?"

"Chcem.", povedal Kamilko. "A mimochodom, čo je na tom zvláštne, že ty, bod V a body C, P, Q ležíte na jednej kružnici? To platí pre hocijaký trojuholník ABC!"

Vtedy sa bod V zarazil. Tento úbohý malý potulný bod, ktorý by blúdil dookola pokružnici, keby tam bod V nestál, odhalil jeho tajomstvo?

"Ako to myslíš, že na tom nie je nič zvláštne?" spýtal sa.

"Tak, že to platí pre ľubovoľný trojuholník. Pozri ..."

Kamilko začal vysvetľovať, prečo v hocijakom trojuholníku ABC musia body P, Q (päty výšok vedených bodmi A, B), bod V (priesečník týchto výšok) a bod C ležať na jednej kružnici.

### 1. príklad

Dokážte, že takéto body P, Q, V, C skutočne musia ležať na jednej kružnici, a to pre ľubovoľný trojuholník ABC.

Bod V zistil, že Kamilko vôbec nie je hlúpy. Ale zo súťaže sa už nedalo vyvliecť, tak povedal, aby začali. Ešte sa dohodli, že najprv zadá hádanku bod V. Ten začal:

### 2. príklad

Myslím si čísla. Všetky sú štvorciferné, končia číslicou 9. Tieto čísla majú takú vlastnosť, že sú deliteľné každou svojou číslicou. Ktoré čísla si myslím?

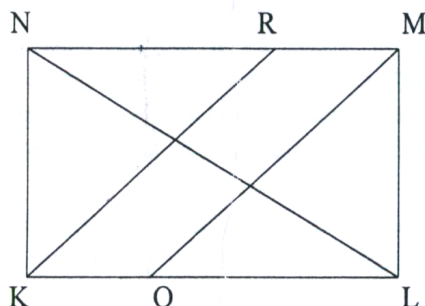
Kamilko sa zamyslel, chvíľu počítal, a povedal všetky čísla, ktoré spĺňali uvedené vlastnosti. Teraz bol na rade Kamilko, aby zadal hádanku pre bod V.

### 3. príklad

Myslím si číslo. Je to najmenšie prirodzené číslo, ktoré je deliteľné 49, má 11 rôznych kladných deliteľov a jeho desiatkový zápis končí číslicou 5. Ktoré číslo si myslím?

Bod V začal počítať. Ale nech robil, čo robil, nemohol prísť na číslo, ktoré si Kamilko myslel. Preto uznal svoju porážku. Navyše sa Kamilkovi ospravedlnil, že ho považoval za hlúpeho. Kamilko sa naňho už nehneval, sám sa tešil zo svojho víťazstva. Rozlúčil sa s bodom V a pobral sa ďalej.

Ide Kamilko, ide, až príde k veľkej sčasti zamaľovanej ploche. Vyzerala takto:



Je to veľký obdĺžnik KLMN, ktorý je rozdelený na 6 častí takto: Na strane KL leží bod O a platí dĺžka KO sa rovná polovici dĺžky OL. Podobne na strane MN leží bod R, dĺžka MR sa rovná polovici dĺžky RN. Úsečky KR, OM, LN rozdeľujú tento obdĺžnik na 6 častí. Jedna z dvoch najmenších častí je vyfarbená na červeno.

Pri obdĺžniku plakala červená ceruzka Sandra. Kamilko k nej prišiel a spýtal sa:

"Prečo nariekaš?"

"Musím vyfarbiť celý obdĺžnik. Tak som začala farbiť, a už po zafarbení jednej zo šiestich plôch som sa skrátila o 8 pukimukov (v tejto rovine sa všetko meria len na pukimuky). Nevieť, či budem sama stačiť na zafarbenie celého obdĺžnika."

"Neplač, ja to zistím," povedal Kamilko. Začal pobehovať okolo obdĺžnika, niečo počítal a po chvíli sa vrátil ku Sandre. Už viem, o koľko pukimukov sa skrátíš, keď vyfarbíš celý obdĺžnik.

#### 4. príklad

O koľko pukimukov sa Sandra ešte skrátí, ak má dofarbiť celý obdĺžnik? (Predpokladáme, že ceruzka sa skraca rovnomerne, teda pri zafarbení jednotky plochy sa skrátí vždy o rovnakú dĺžku.)

Sandra sa hneď uspokojila, lebo zistila, že celý obdĺžnik vyfarbí a ešte z nej aj kúsok ostane. Dala sa do práce. Keď bola hotová, rozhodla sa, že pôjde do sveta spolu s Kamilkom.

Idú teda v dvojici, Sandra vpravo, Kamilko vľavo, až prídu k zvláštnej čiare. Pri nej stojí niekoľko bodov. Keďže obaja boli zvedaví, hneď sa spýtali:

"Načo tu čakáte?"

"No predsa na električku," povedal jeden bod.

"A kam tá električka ide?"

"Do mesta. Vy ste asi cudzinci, však?"

"Áno. Môžeme sa aj my odvieť do mesta?"

"Samozrejme. Kúpte si lístok."

Sandra a Kamilko si kúpili lístok a čakali. Po chvíli to ceruzku omrzelo a začala sa pýtať:

"Ešte dlho budeme čakať?"

"Nevieť," odpovedal bod, s ktorým sa rozprávali pred chvíľou. "Čas jazdy medzi konečnými stanicami je 45 ťukipukov (čas tu merajú len na ťukipuky). Na obidvoch konečných stanicách čakajú električky 5 ťukipukov. Akurát dnes pridali na linku ďalších 5 električiek a interval medzi električkami sa znížil o 1 ťukipuk. Ale nepamätám sa, v akých intervaloch jazdili električky predtým."

Kamilko počúval tento rozhovor. Ako inak, aj s týmto problémom si vedel dať rady. O chvíľu vedel povedať nielen interval medzi električkami, ale aj počet súprav na linke.

#### 5. príklad

Koľko súprav jazdí teraz na linke a v akom intervale? (Dĺžka intervalu vyčíslená v ťukipukoch je prirodzené číslo.)

Ešte to Kamilko ani nestihol poriadne vysvetliť, už prišla električka. Všetci nastúpili a vybrali sa do mesta ...

*(pokračovanie)*

**6. príklad (nepovinný)**

Autobus na linke číslo 34 prejde celú trasu za 75 minút. Ako dosiahnuť, aby mu to trvalo polovičný čas?

Riešenia príkladov 2. série nám pošli najneskôr v pondelok, 17. novembra 1997 (rozhodujúca je pečiatka pošty) na adresu

PIKOMAT

P-MAT, n. o.

Hrušková 30

831 06 Bratislava

Riešenia poslané po tomto termíne nebudú opravené.