Vzorové riešenia 1. série zimnej časti, kategória 7–9

Úloha S1: Lúka. *Opravovala Alexandra „Saša“ Porembová.*

Najprv si urobíme jasno v tom, čo je napísané v zadaní. Na cestičke ležalo niekoľko odtrhnutých trojlístkov a štvorlístkov, ktoré mali spolu **aspoň** 15 lístkov – to znamená, že lístkov bolo 15 alebo ľubovoľný iný počet väčší ako 15. Ďalej vieme, že ak by nám Jim povedal, koľko lístkov tam bolo presne, dokázali by sme určiť, koľko tam ležalo trojlístkov a štvorlístkov. Našou úlohou je teda nájsť taký počet lístkov, ktorý sa dá na trojlístky a štvorlístky rozdeliť iba **jedným jediným** spôsobom.

Trochu problematickým bolo v zadaní slovo „niekoľko“, pretože sa dalo pochopiť dvojako. Preto tu preskúmame obe možnosti.

Predtým si ale ešte vyjasníme jednu skoro až samozrejmú, zato dôležitú otázku: aké počty lístkov sa vôbec dajú poskladať z 3-lístkov a 4-lístkov? Počty 0, 3 a 4 sa dajú, to je jasné. Počty 1, 2 a 5 sa nedajú, to je tiež jasné. Ďalej 6 = 3+3, 7=3+4, 8=4+4, 9=3+3+3, atď. Ako vidíme, zvýšiť počet lístkov o 1 sa dá buď nahradením 3-lístka 4-lístkom, alebo zamenením dvoch 4-lístkov (8) za tri 3-lístky (9). Takýmto spôsobom teda **vieme poskladať počty 0, 3, 4 a všetky počty od 6 vyššie.** Teraz k samotnej úlohe.

1. možnosť: „niekoľko“ môže byť aj 0, a teda na cestičke mohli ležať napríklad len samé trojlístky alebo len samé štvorlístky.

Prácu nám výrazne uľahčí to, že si všimneme počet lístkov 12. 12 je totiž najmenší počet lístkov, ktorý sa dá získať 2 spôsobmi: 3 štvorlístky alebo 4 trojlístky. A v čom nám to pomôže? Ak budeme mať počet lístkov, ktorý vieme rozdeliť na 12 lístkov plus *rozumný zvyšok*, tak tento počet lístkov vieme vytvoriť aspoň 2 spôsobmi: v jednom bude tých 12 lístkov zložených z 3 štvorlístkov a v druhom zo 4 trojlístkov. A čo je to „***rozumný zvyšok***“? To je taký počet lístkov, ktorý sa dá poskladať zo štvorlístkov a trojlístkov. A my tým pádom už vieme, že rozumný zvyšok je 0, 3, 4, 6 alebo viac lístkov.

Takže opakujeme: všetky počty v tvare *12 + rozumný zvyšok* sa budú určite dať poskladať viac ako jedným spôsobom. To sú konkrétne tieto počty: 12+0 = **12**, 12+3 = **15**, 12+4 = **16**, 12+6 = **18**, **a všetky väčšie**. Keďže podľa zadania nás nič menšie ako 15 nemusí zaujímať, je nám jasné, že jediný počet, ktorý prichádza do úvahy ako riešenie, je 17. Ešte sa ubezpečíme, či sa 17 naozaj dá poskladať jediným spôsobom (jednoducho to vyskúšame): 17 = 3+3+3+4+4, a potom to spokojne prehlásime za riešenie úlohy: **na cestičke ležali 3 trojlístky a 2 štvorlístky.**

2. možnosť: „niekoľko“ znamená aspoň 1, a teda na cestičke musel ležať aspoň jeden trojlístok a aspoň jeden štvorlístok.

Tu postupujeme podobne ako pri predošlej možnosti. Ešte stále je 12 najmenší počet lístkov, ktorý sa dá poskladať 2 spôsobmi, no to nám tu už nestačí. My potrebujeme mať v každom zložení zastúpený aspoň jeden trojlístok a aspoň jeden štvorlístok. To vyriešime jednoducho tak, že ich do každého zloženia pridáme – teda že k našej 12-tke pridáme jeden trojlístok a jeden štvorlístok, čím dostaneme 12+3+4 = 19.

Teraz môžeme opäť povedať, že všetky počty v tvare *19 + rozumný zvyšok* sa budú určite dať poskladať viac ako jedným spôsobom. To sú konkrétne tieto počty: 19+0 = **19**, 19+3 = **22**, 19+4 = **23**, 19+6 = **25**, **a všetky väčšie**. Keďže podľa zadania je lístkov aspoň 15, ostávajú v hre už iba tieto počty: 15, 16, 17, 18, 20, 21, 24. Opäť ešte každý z nich overíme (skúsime ho poskladať všetkými možnými spôsobmi) a zistíme, že všetky sa dajú poskladať jediným spôsobom. Konkrétne zloženia troj- a štvorlístkov už nejdem vypisovať, no **riešením úlohy sú počty lístkov: 15, 16, 17, 18, 20, 21, 24.**

Bodovanie:
správny výsledok aj s odôvodnením – 5b.;
výsledok s náznakom postupu bez zdôvodnenia – max. 2,5b.;
vypisovanie možností bez postupu – 1-1,5b.

Úloha S2: Železnica. *Opravoval Pavol „Lietadlo“ Koprda.*

Musíme priznať, že zadanie úlohy bolo trochu komplikovane formulované, a preto sa vyskytli až 4 rôzne pochopenia. Náročnosť úlohy a spôsob riešenia však boli vo všetkých 4 prípadoch veľmi podobné, a preto sme uznávali všetky pochopenia. Tu si popíšeme iba to najčastejšie sa vyskytujúce, na konci uvediem pre ostatné pochopenia už iba číselné výsledky.

Zadanie nám hovorí, že na trati dlhej 12 kilometrov sa nachádzajú tri priechody, a to na 2., 6. a 12. kilometri. Prvý priechod sa vždy na 3 minúty otvorí a potom je 3 minúty zatvorený. Zvyšné dva sú 3 minúty zatvorené a následne 2 minúty otvorené. Pri štarte sa všetky priechody práve zatvorili. Otázkou je, ako najrýchlejšie môže Jimova banda prejsť traťou bez zastavenia?

Máme teda nájsť čo najkratší čas, za ktorý vie banda prejsť trať tak, aby vždy došla k priechodom vtedy, keď sú otvorené. Na to potrebujeme spraviť dve veci:

1) Nájsť nejaký vyhovujúci čas, resp. vyhovujúcu rýchlosť.
2) Dokázať, že ak by Jimova banda išla rýchlejšie, narazila by na nejaký zatvorený priechod.

Vieme, že prvé 3 minúty po štarte je prvý priechod – vzdialený 2 kilometre – zatvorený. Jimova banda k nemu preto musí putovať aspoň tieto 3 minúty. Už teraz je preto skalopevne isté, že **banda môže ísť rýchlosťou najviac 2km za 3min**. Poďme teraz vyskúšať, či táto rýchlosť vyhovuje aj pre zvyšné dva priechody – spravíme si pre ne takúto tabuľku:

ČAS	2. priechod	3. priechod
0-3	Zatvorený	Zatvorený
3-5	Otvorený	Otvorený
5-8	Zatvorený	Zatvorený
8-10	**Otvorený**	Otvorený
10-13	Zatvorený	Zatvorený
13-15	Otvorený	Otvorený
15-18	Zatvorený	Zatvorený
18-20	Otvorený	**Otvorený**

K druhému priechodu – na 6. kilometri – príde banda za 9 minút. Vtedy je tento priechod otvorený (pozri tabuľku), takže to vyhovuje. K tretiemu priechodu – na 12. kilometri – príde banda za 18 minút. Vtedy je tento priechod otvorený (pozri tabuľku), takže to tiež vyhovuje. Ukázali sme teda, že rýchlosťou 2km za 3min sa trať dá prejsť a tiež sme ukázali, že rýchlejšie Jimova banda už ísť nemôže. To je koniec riešenia. **Trať prejdú za 18 minút**.

Poznámka – pre iné pochopenia zadania boli výsledky takéto:

19 minút a 30 sekúnd, ak ste zadanie pochopili tak, že priechody sú na 2., 6. a 8. kilometri.

18 minút, ak ste zadanie pochopili tak, že priechody sú na 2., 6. a 8. kilometri, ale posúvali ste si, kedy sa ktorý priechod uzavrel v čase štartu (napríklad ste predpokladali, že 2. priechod bol už minútu pred štartom uzavretý, a teda sa otvoril o minútu skôr).

18 minút, ak ste zadanie pochopili tak, že priechody sú na 2., 6. a 12. kilometri a ešte k tomu ste si aj posúvali, kedy sa ktorý priechod uzavrel.

Bodovanie:

správny výsledok – 3b.;
popis, prečo to nejde rýchlejšie a nejaké vysvetlenie zvyšného riešenia – 2b.;
za numerické chyby som strhával najviac 1 bod.

Úloha S3: Čokoláda. *Opravoval Michal „Kesy“ Kesely*.

Prvým nápadom po prečítaní úlohy je: kúpim si čokoládu a idem sa s ňou hrať (a vraj s jedlom sa hrať nemá), budem ju skúšať lámať. Vyriešim príklad a ešte budem mať aj sladkosť – dve výhry v jednom!

Ak som mal smolu, tak som si kúpil čokoládu s rozmermi 1×1. Tá sa deliť nedá vôbec. Ani s čokoládou 1×2 sa príliš nezahrám – tá sa dá rozdeliť len jediným spôsobom a všetky štvorčeky získam hneď po prvom rozlomení. Ak dostanem čokoládu 1×3, rozlámem ju celú na dve lámania. A vlastne ak dostanem čokoládu 1×10, nezostáva mi nič iné, len postupne prelamovať ten jediný riadok, ktorý má. Na rozlámanie takej čokolády teda potrebujem 9 lámaní. **Čokoládu 1×*n* teda rozlámem na (*n* – 1) lámaní**.

Ale čo ak dostanem čokoládu 2×10? Prvá myšlienka vraví: jedným lámaním ju prelomím na dve polky s rozmermi 1×10. No a predsa už viem, že na 1×10 potrebujem 9 lámaní. Na 2×10 teda treba 1+2·9 = 19 lámaní.

A ak mám čokoládu 9×10? Predsa ju rozlámem na 9 riadkov, každý s rozmermi 1×10 (na to treba 8 lámaní), a potom každý tento riadok na 9 lámaní rozlámem úplne. Spolu teda potrebujem 8+9·9 = 89 lámaní. Pre všeobecný prípad čokolády m×n budem teda potrebovať najprv (m – 1) lámaní na rozlámanie čokolády na m riadkov, každý s rozmermi 1×n. Potom ešte každý z týchto riadkov viem rozlámať už známym postupom (n – 1) lámaniami na jednotlivé kúsky. **Spolu teda potrebujem (*m* – 1) + *m*·(*n* – 1) lámaní**.

To už začína vyzerať podozrivo – počet lámaní je vždy o 1 nižší ako počet malých štvorčekov v čokoláde. Dokonca keď roznásobím náš predchádzajúci vzorec, dostanem presne počet malých štvorčekov v čokoláde zmenšený o 1:

$$(m-1) + m\cdot(n-1) = m - 1 + m\cdot n - m = \boldsymbol{m\cdot n - 1}$$

Myšlienka je to dobrá, ale ako správny riešiteľ Pikomatu musím byť veľmi opatrný a klásť si ďalšie otázky! Predovšetkým túto: vždy som to lámal najprv po riadkoch a potom jednotlivé riadky samostatne. Čo keby som to skúsil lámať ináč? Nemôžem si tým ušetriť nejaké rozlomenie? Lebo napríklad pri čokoláde 100×200 je už všetkých postupov, ako ju rozlámať, neuveriteľne veľa. Musím teda prísť s niečím univerzálnym, niečím, čo obstojí vždy!

Tým niečím môže byť aj takáto prekvapivo jednoduchá myšlienka. Pozriem sa, čo sa deje v jednom kroku lámania. Vezmem jeden kúsok čokolády a rozlomím ho na dva menšie. Z jedného kúsku čokolády sa teda stali dva. Tým som jedným lámaním zvýšil počet kúskov čokolády o 1. Všimnite si, že nepoužívam žiadne konkrétne rozmery čokolády, ani konkrétny spôsob lámania čokolády. Platí to všeobecne, vždy. **Pri každom (akomkoľvek) jednom lámaní sa počet kúskov čokolády zväčší o 1**.

V tejto úlohe začínam s jedným celistvým kúskom a potrebujem sa dopracovať k $m \cdot n$ kúskom. Po prvom lámaní budem mať vždy 2 kúsky čokolády, po druhom 3, po treťom 4 a tak ďalej. Na konci chcem mať $m \cdot n$ kúskov čokolády. Je preto jasné, že na to potrebujem **($m \cdot n$) – 1 lámaní**. Hotovo, skončil som, pretože som svojou úvahou pokryl všetky možné rozmery čokolády a všetky možné spôsoby jej lámania. **Na čokoládu s rozmermi $m \times n$ budem potrebovať ($m \cdot n$) – 1 lámaní.**

Bodovanie:
iba správny výsledok – 1,5b.;
odvodený z konkrétnych rozmerov čokolád – 2-3b.;
odvodený pre všeobecné rozmery, ale len pre konkrétny postup lámania – 4b.;
úplné odôvodnenie – 5b.

Úloha S4: Rada starších. *Opravoval Peter „Comp“ Ambrož.*

Najlepšou taktikou pre vyriešenie tohto príkladu je postupné overovanie pravdivosti výrokov a odstraňovanie konfliktov. Ešte skôr, než sa do toho pustíme, pripomeniem, že každý z Indiánov používa čisté logické myslenie. Pokiaľ klame, jeho výrok neplatí, a platí jeho presný opak. Napr. ak Hausis klame, potom neplatí, že číslo je väčšie ako 10, takže musí byť menšie alebo rovné 10. Toto dávam do pozornosti všetkým. Mnohí z vás práve tento výrok negovali (otáčali) nesprávne.

Abey (*A*) a Squanto (*S*) sú vzájomne prepojení. Ak *A* hovorí pravdu, hovorí ju aj *S*, lebo to vyplýva z prvého výroku *A*. Ak *A* klame, klame aj *S*. Opačne, ak *S* hovorí pravdu, znamená to, že ju mal aj *A*, keď tvrdil, že *S* hovorí pravdu. Ak *S* klame, klamal aj *A*.

Podobne sú prepojení aj Hausis (*H*) a Zitkala (*Z*). *Z* tvrdí, že *H* klame. Ak *Z* klame, *H* hovorí pravdu. Ak *H* klame, *Z* mal pravdu vo svojom tvrdení, a teda hovorí pravdu.

Pozrime sa najprv na situáciu, **keď *A* a *S* hovoria pravdu**. Číslo musí byť podľa ich tvrdení prvočíslo deliteľné 3 a nesmie byť druhou mocninou prirodzeného čísla (ďalej len „mocninou“). Jediné prvočíslo deliteľné troma je 3. *H* v tomto prípade klame, lebo tvrdí, že číslo je väčšie ako 10. *Z* tiež klame, lebo tvrdí, že číslo je deliteľné 5, čo 3 určite nie je. Avšak niekto z dvojice *Z*, *H* musí mať pravdu. Keďže to tak nie je, bol náš predpoklad (že *A* a *S* hovoria pravdu) chybný.

Platí teda, že *A* a *S* klamú. Z ich tvrdení teraz vyplýva, že číslo NIE JE prvočíslo, NIE JE deliteľné 3 a JE mocninou. Druhé mocniny menšie než 42 sú: 1, 4, 9, 16, 25, 36. Ďalej nám vypadnú čísla 9 a 36, lebo sú deliteľné 3. Ostávajú nám možnosti 1, 4, 16, 25 (1-tka ostáva, lebo nie je prvočíslom). Ak *Z* hovorí pravdu, *H* klame, a muselo by platiť, že číslo je menšie alebo rovné 10, nepárne, deliteľné 5. Také číslo je jedine 5, ale v našom zozname sa nenachádza. Ostala nám posledná možnosť, že *Z* klame a *H* hovorí pravdu. Podľa nich je číslo väčšie ako 10, párne a nedeliteľné 5. Tvrdenia spĺňa jedine číslo 16, ktoré je riešením tejto úlohy. Prebrali sme všetky logické možnosti a obdržali sme **jediné riešenie: číslo 16**.

Bodovanie:
výsledok – 1b.;
riadny postup – 4b.;
postup s logickou chybou (napr. že neexistuje prvočíslo deliteľné 3) – 3b.;
pokiaľ ste nepreskúmali všetky možnosti napr. kvôli tomu, že ste v postupe nemali žiaden systém – 2b.;
postup s viacerými chybami, kde bolo len šťastím, že ste dostali správny výsledok – 1b.;
drobné chyby a nejasnosti – mínus 0,5b.

Úloha S5: Pemikam. *Opravoval Milan „Jimi" Smolík.*

Kľúčom k tomuto príkladu je vzťah vyjadrujúci obsah trojuholníka:

$$S = \frac{a \cdot v_a}{2},$$

kde *S* je obsah, *a* je základňa (ľubovoľná strana trojuholníka) a v_a je výška na túto základňu.

To znamená, že dva trojuholníky s rovnako dlhou základňou aj výškou majú aj rovnaký obsah. Taktiež ak majú dva trojuholníky rovnakú výšku, ale jeden má 2-krát dlhšiu základňu, tak má aj 2-násobný obsah. Toto platí pre ľubovoľné násobky, teda ak majú dva trojuholníky rovnakú výšku, ale jeden má *n*-krát dlhšiu základňu, bude mať aj *n*-krát väčší obsah. Takisto naopak: ak majú dva trojuholníky rovnakú výšku, ale jeden má *n*-násobný obsah, musí mať aj *n*-násobnú základňu.

Viem, že Pemikam mám rozdeliť na 5 rovnako veľkých kusov, teda všetky musia mať rovnaký obsah – jednu pätinu celého Pemikamu.

Ako ste si mnohí správne všimli, trojuholník BCD má rovnakú výšku ako trojuholník ABD (výška na stranu CD resp. AD). Viem taktiež, že BCD pozostáva z jedného kusu, zatiaľ čo v ABD sú kusy štyri. Takže pri rovnakej výške má ABD 4-násobný obsah ako BCD. To znamená, že musí mať aj príslušnú základňu 4-krát dlhšiu. Preto bod D umiestnim tak, aby stranu AC rozdeľoval v pomere 4:1.

Podobne to platí aj pre trojuholníky AGD a GBD, ktoré tiež majú rovnakú výšku (na stranu AG resp. BG). Pritom AGD pozostáva z 3 kusov, zatiaľ čo GBD z jedného. Takže opäť: AGD má rovnakú výšku, ale 3-krát väčší obsah. Preto musí mať aj 3-krát dlhšiu základňu ako GBD. To znamená, že stranu AB rozdelím bodom G v pomere 3:1.

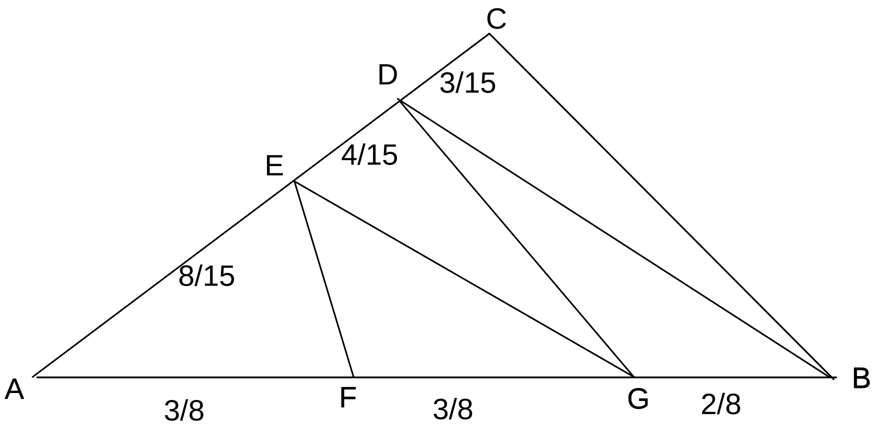
Ďalej si všimnime trojuholníky GDE a AGE, ktoré majú znova rovnakú výšku (na stranu DE resp. AE), ale rôzny obsah. AGE pozostáva z dvoch kusov, zatiaľ čo GDE tvorí iba jeden. To znamená, že úsečku AD musíme rozdeliť v pomere 2:1 bodom E. Ale pozor! Už AD vznikla iba ako štyri pätiny AC. To znamená, že ak chceme dĺžky AE a ED vyjadriť ako časti celej strany AC, musíme počítať takto:

$$|AE| = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}|AC| = \frac{8}{15}|AC| \quad \text{a} \quad |ED| = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}|AC| = \frac{4}{15}|AC|.$$

Ako na posledné sa pozrime na trojuholníky AFE a FGE. Znova majú rovnakú výšku (na stranu AF resp. FG) a tentoraz aj obsah, lebo oba sú tvorené jedným kusom. To znamená, že aj ich základne budú rovnaké, a preto bodom F rozdelím AG na polovice. Ale znova pozor! Keďže AG vznikla iba ako tri štvrtiny AB, dĺžky AF a FG vyjadrím opäť takto:

$$|AF| = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}|AB| = \frac{3}{8}|AB| \quad \text{a} \quad |FG| = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}|AB| = \frac{3}{8}|AB|.$$

Takže Pemikam rozkrájam tak, ako vidno na obrázku.



Bodovanie:
poznatok, že potrebujeme vzťah pre obsah trojuholníka – 0,5b.;
správny postup vedúci k riešeniu – 1,5b.;
dôkaz, že tento postup funguje – 1,5b.;
výsledok – 1,5b.;
za drobné nepresnosti alebo dobré postrehy som odoberal alebo pridával 0,5 boda.

p-mat

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

AGENTÚRA NA PODPORU VÝSKUMU A VÝVOJA

Pikomat je podporovaný Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy číslo LPP-0375-09