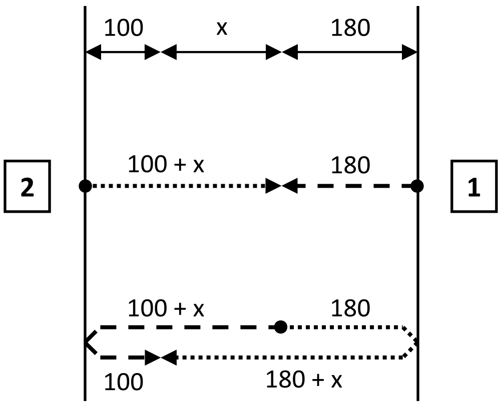
Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

30. ročník www.pikomat.sk školský rok 2012/2013

Vzorové riešenia 2. série letnej časti, kategória 7–9

Úloha S1: Ponad rieku. *Opravovala Irena „Enka“ Bačinská.*



Najprv si označíme vznášadlo, ktoré štartovalo sprava ako „Prvé“ a vznášadlo, ktoré štartovalo zľava ako „Druhé“.

Ďalej si treba hneď na začiatku uvedomiť, že ak vznášadlá čakajú na brehoch rovnako dlhú dobu, tak nám čakanie neovplyvní výsledok. Prečo? Lebo keď vznášadlo išlo stále rovnakou rýchlosťou a niekde počas cesty si spravilo 3-minútovú prestávku, tak je vlastne úplne jedno, kedy presne si tú prestávku spravilo. Takže v našej úlohe ak si najprv jedno vznášadlo spravilo 3 minúty prestávku, a potom si aj druhé vznášadlo spravilo 3 minúty prestávku, je to to isté, akoby obe naraz na 3 minúty zastavili a potom pokračovali. Takže na ich vzájomnú polohu to nebude mať žiaden vplyv. Akurát sa celé putovanie predĺži o 3 (príp. 5) minút.

Šírku rieky rozdelíme na 3 časti tak, ako na obrázku. Takže rieka je široká (100+x+180) metrov. Ak Ťa trápi možnosť, že by rieka bola užšia ako 280 metrov, nezúfaj, v takom prípade by jednoducho hodnota x vyšla záporné číslo.

Od štartu po prvé stretnutie prešlo Prvé vznášadlo (na obrázku čiarkovaná čiara) 180 metrov a Druhé vznášadlo (na obrázku bodkovaná čiara) prešlo (100+x) metrov. Dokopy tak prešli **JEDNU celú šírku rieky**. Keď potom pokračovali, tak Prvé vznášadlo prešlo dráhu (100+x+100) metrov a Druhé prešlo (180+180+x) metrov – pozri spodnú časť obrázku. Spolu teda prešli 100+x+100 + 180+180+x = (100+x+180) + (100+x+180) metrov, čiže **DVE šírky rieky**.

Ako vidíme, v druhom časovom úseku prešli dokopy dvakrát takú dlhú dráhu, ako v prvom časovom úseku. Keďže išli stále rovnako rýchlo, tak je jasné, že aj každé vznášadlo samostatne muselo prejsť v druhej časti dvakrát viac ako v prvej časti.

Toto vieme pre každé vznášadlo jednoducho zapísať, takto:

<u>Pre Prvé vznášadlo</u>:

$$2\cdot 180 = x + 100 + 100$$
$$360 = x + 200$$
$$\boldsymbol{x = 160} \textbf{ metrov}.$$

Pre Druhé vznášadlo: $2 \cdot (100+x) = 180 + 180 + x$

$$200 + 2 \cdot x = 360 + x$$

$$\boldsymbol{x = 160 \text{ metrov}}.$$

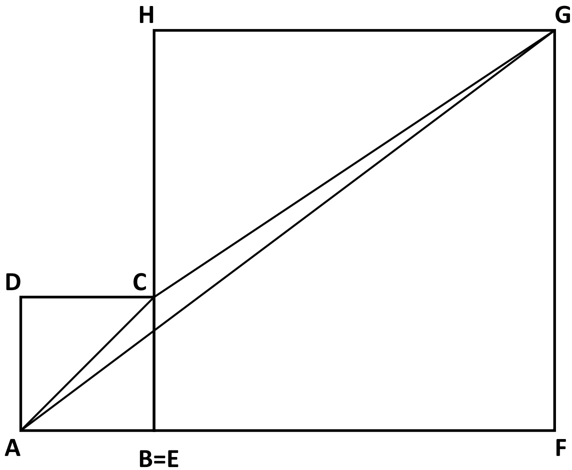
V oboch prípadoch nám vyšiel ten istý výsledok, čo je hneď aj peknou skúškou správnosti. Môžeme preto spokojne prehlásiť, že rieka bola široká 100+160+180 = **440 metrov**.

Bodovanie:
správny výsledok – 1,5b.; postup – 2b.; vysvetlenie, že na dobe čakania nezáleží – 1,5b.

Úloha S2: Pohroma v hračkárstve. *Opravoval Matúš Kopf.*

Vyrátať priamo výšku trojuholníka ACG je celkom problém, musíme na to ísť teda nejakou fintou. Čo vyrátať vieme, sú obsahy trojuholníkov AGF, HCG, CDA. Ich obsahy vyrátame ľahko, keďže sú to pravouhlé trojuholníky:

S(AGF) = (104·100)/2 = 5200cm^2.
S(HCG) = (100·96)/2 = 4800cm^2.
S(CDA) = (4·4)/2 = 8cm^2.



Ďalej tiež vieme vyrátať obsah celého útvaru ako súčet obsahov štvorcov ABCD a EFGH. Ten bude S(ABCD) + S(EFGH)= 16 + 10 000 = 10 016cm^2.

Teda keď zoberieme obsah celého 6-uholníka AFGHCD a odrátame od neho obsahy trojuholníkov AFG, HCG a CDA, tak to, čo nám ostane, bude obsah trojuholníka ACG.

S(ACG) = S(ABCD) + S(EFGH) – S(AGF) – S(HCG) – S(CDA) = 10 016 – 5200 – 4800 – 8.
S(ACG) = **8cm^2**.

Teda **obsah trojuholníka ACG je 8cm^2**.

Iný, trochu elegantnejší postup:

Uvedomíme si, že AC musí byť rovnobežné s EG (pretože uhly BAC a FEG sú zhodné a majú veľkosť 45°). Ďalej si uvedomíme, že uhlopriečky v štvorci sú na seba kolmé a označíme si priesečník uhlopriečok v štvorci ABCD napríklad X. Potom určite platí, že BX je kolmé na AC (uhlopriečky v štvorci sú na seba kolmé). Zároveň BX bude aj výška trojuholníka ACG na stranu AC (pretože AC a EG sú rovnobežné a BX je kolmé na AC).

Teda zjavne obsahy trojuholníkov ABC a ACG budú rovnaké, keďže majú jednu rovnakú stranu a rovnakú výšku na ňu.

Stačí nám teda vypočítať obsah trojuholníka ABC, čo je vlastne polka štvorca 4×4, teda obsah trojuholníka ABC je 8cm^2. Obsah trouholníka ACG musí byť rovnaký, teda tiež 8cm^2.

Týmto sme vlastne aj ukázali niečo viac, než sa od nás v úlohe chcelo: Obsah ACG nebude vôbec závisieť na veľkosti štvorca EFGH!

Bodovanie:
Najčastejšou chybou bolo, že ste čísla ako odmocnina z 32 zaokrúhľovali na 2 desatinné miesta. Potom vznikla chyba aj v konečnom výsledku. Ak celý postup bol inak správne, strhával som za toto 0,5b.
Občas ste sa snažili dokázať, že trojuholník ACG neexistuje, tu som sa rozhodoval podľa kvality riešenia, maximálne som za toto dával 1,5b.

Úloha S3: Požičovňa kozmických lodí. *Opravoval Pavol Hronský.*

Väčšina z Vás tento príklad riešila spôsobom pokus-omyl. Našli sa aj takí, ktorí pridali trošku počítačového umenia a priložili tabuľku všetkých možností nosnosti lode, z ktorej sa dalo jednoznačne vyčítať, ktoré lode sú najvýhodnejšie. Tento prístup samozrejme nie je zlý, avšak pri potrebe spracovať väčšiu tabuľku (takú, ktorá má viac ako len 47 riadkov) to už môže byť náročné. Hlavne ak nemáte po ruke počítač. Preto sa vzorové riešenie bude uberať trochu iným smerom.

Čo teda vieme? Vieme, že za každú cestu hore-dole chlapík zaplatí 1 tonu železa. Počet ciest si označme P. Vieme ešte, že po prevezení celého nákladu bude treba zaplatiť jednu celú nosnosť lode, nazvime ju N. Chlapík je teda schopný odviezť P·N ton železa (počet ciest krát nosnosť lode) a na konci bude treba zaplatiť P+N ton železa. Dokopy treba previezť 47 ton železa. My sa teda snažíme nájsť také 2 prirodzené čísla, aby ich súčet bol čo najmenší a zároveň súčin bol aspoň 47.

Je jasné, že zobrať velikánsku loď s nosnosťou 47 ton a previezť všetko železo na jedenkrát je hlúposť, lebo by chlapík ostal dokonca 1 tonu dlžný (musel by zaplatiť dokopy 48 ton). Takže isto bude treba ísť na viackrát. Ak by to chcel previezť na 2 cesty, vezme 24-tonovú loď, čo bude stáť 26 ton železa. Môžeme si všimnúť, že ak bude zvyšovať počet ciest a k tomu rozumne znižovať nosnosť lode (rozumne znamená zobrať vždy tú najmenšiu, ktorá na daný počet ciest stačí), čísla N a P sa budú k sebe približovať a ich súčet sa bude zmenšovať. Najlepšie je teda zobrať N=7 a P=7. Poplatok za prevoz by bol 7+7=14 ton, tým pádom by chlapíkovi ostalo 33 ton. Toto je určite najlepšie, čo môže chlapík dosiahnuť.

Je to však jediné správne riešenie? Nedá sa k tomuto istému výsledku dostať ešte inými číslami? Ak by také existovali, budú musieť byť niekde veľmi blízko N=7 a P=7. Otestujeme preto N=6 a potom tiež N=8. Pri nosnosti N=6 ton bude treba ísť 8-krát, takže P=8. Chlapík zaplatí zas iba 14 ton, takže aj toto je prijateľná možnosť. No a samozrejme aj keď čísla otočíme a použijeme P=6 a N=8, bude to to isté. Takže to je ešte ďalšie riešenie. Keby chcel chlapík ísť len 5-krát, musel by zobrať až 10-tonovú loď, a to by ho stálo 15 ton, čo je horšie ako 14, takže to už nechce.

Správna odpoveď teda je, že chlapík si má požičať loď s nosnosťou **6, 7 alebo 8 ton**.

Bodovanie:
každé jedno správne riešenie – 1b. (dokopy 3b); vysvetlenie postupu – 2b.

Úloha S4: Karty na palube. *Opravoval Martin „Panda“ Svetlík.*

Najprv si vypíšeme všetky sumy (v centoch, nech nám nezavadzia desatinná čiarka), o ktoré sa budú hrať jednotlivé hry. Sú to: 1, 2, 4, 8, 16 ,32, 64, 128, 256, 512 centov. Je dôležité si všimnúť, že vždy súčet peňazí za prvých niekoľko hier je o jeden cent menší ako suma za ďalšiu hru (napr. 1+2+4+8 = 15, čo je o 1 menej ako 16).

Z toho hneď vyplýva, že museli hrať všetkých 10 hier, lebo keby hrali len prvých 9, tak by Zig Zag (aj keby vyhral všetky) mohol vyhrať maximálne 511 centov, čo by mu nestačilo na to, aby od Maxa vyhral všetky jeho peniaze – 601 centov. Z tejto myšlienky vyplýva aj to, že tú poslednú hru o 512c musel vyhrať Zig Zag.

Keby predposlednú hru o 256 vyhral Max, tak z týchto dvoch hier dokopy by Zig Zag bol 256 v zisku, a opäť mu všetky predošlé hry (súčet 255) nestačia, aby sa dostal na +601, teda aby vyhral od Maxa všetko. Takže aj predposlenú vyhral Zig Zag.

Čo tretia hra od konca? Ak by aj tú vyhral Zig Zag, bol by 896 v pluse, a to aj keby Max vyhral všetky predošlé hry (súčet 127), by bolo príliš veľa. Takže tretiu hru od konca vyhral Max.

Týmto spôsobom môžme pokračovať ďalej. Uvedomíme si, že ak sa niektorou hrou príliš vzdialime od začiatočnej sumy 601c na Maxovom konte, tak predošlými hrami sa tam nedokážeme vrátiť (napr. keď vieme, že za posledné dve hry dokopy vyhral Zig Zag 768, čo je viac ako 601, tak hru za 128 musel prehrať, lebo inak by sa jeho súčet vzdialil už príliš od 601).

Spravíme si teda tabuľku, kde budeme postupne dopĺňať hry od konca. Ak je Maxova hotovosť v niektorom stĺpci menšia ako 601, v ďalšom stĺpci (čiže predošlej hre) vyhral Zig Zag, ak je väčšia, v ďalšom stĺpci vyhral Max.

hra č.	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
ZigZag musí ešte vyhrať	512	768	640	576	608	592	600	604	602	601
o koľko sa hrá	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
je v predošlom stĺpci súčet väčší ako 601?	nie	nie	áno	áno	nie	áno	nie	nie	áno	áno
vyhral	Z	Z	M	M	Z	M	Z	Z	M	M

Druhý spôsob: Vieme, že dokopy sa hralo o 1023c. Niektoré z toho vyhral Max, ostatné Zig Zag. Teda môžme si napísať rovnicu M+Z=1023. Vieme aj, že Zig Zag vyhral všetky Maxove peniaze, vrátane tých, ktoré od neho Max vyhral počas niektorých kôl. Teda Z=601+M. Toto môžme dosadiť do prvej rovnice a dostaneme M+601+M=1023, z čoho ľahko vypočítame, že M=211. Teda Max počas tých 10 hier vyhral 211c, a ZigZag vyhral 812c. Tieto čísla potrebujeme zložiť zo súm, o ktoré sa hralo.

Je jasné, že ak Max vyhral dokopy 211c, musel vyhrať hru o 128c (tie drahšie nemohol, to už by bolo veľa, a keby túto nevyhral, tak za tie predošlé dokopy by mal len 127, čo je oveľa menej ako 211). 211-128=83, ešte musel teda vyhrať 83c. Opäť podobnou úvahou určíme, že musel vyhrať hru o 64c, a teda ešte niekde musel vyhrať 19c. Hra za 32 je veľa, zato hru za 16c musel vyhrať, a ešte 3c, to sú hry za 2c a 1c. Zig Zag vyhral ostatné hry.

Oboma spôsobmi sme sa dostali k tomu istému – hrali 10 hier, z toho Max vyhral hry č. 1, 2, 5, 7, 8 a Zig Zag hry č. 3, 4, 6, 9, 10.

Bodovanie:
prečo hrali 10 hier – 1b.; kto vyhral ktoré – 2b.; postup – 2b.

Poznámka:
Keby bola otázka formulovaná „Ktoré hry vyhral a ktoré prehral Max?“ tak by bola odpoveď typu „vyhral hry 1,2,5,7,8 a prehral 3,4,6,9,10“ fajn. Ale keď sme sa pýtali „ktoré hry vyhral Zig Zag a ktoré Max?“ tak pri takejto odpovedi nie je jasné, o ktorom z nich hovoríte.

Úloha S5: Odpoveď. *Opravovala Simona „Simča“ Galková.*

Ako prvé sa pokúsime nájsť číslo, ktoré končí 6-tkou a po delení 13 dáva zvyšok 9. Ako takéto číslo nájsť? Stačí hľadať násobok 13-ky, ktorý končí 7-kou. Prečo? Pretože keď k nemu pripočítame 9, určite bude mať na konci 6-ku a po delení 13-timi dá zvyšok 9.
Vypíšme si násobky 13: 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91, 104, **117**, 130, 143, 156...
Vidíme, že prvý násobok 13-ky končiaci 7-kou je 117. Pripočítame k nemu 9 a máme 126. Našli sme prvé číslo, ktoré končí 6-tkou a po delení 13-timi dáva zvyšok 9. Skúsime ho podeliť 65 a zistíme, že zvyšok je 61. Tu však nie je ešte koniec úlohy! Musíme sa zamyslieť nad tým, či bude ten zvyšok taký vždy. Nebude to náhodou pre ďalšie čísla inak?
Všimnime si, že cifry na konci násobkov 13-ky sa začnú postupne opakovať: **3**, **6**, 9, 2, 5, 8, 1, 4, 7, 0, **3**, **6**,... Cifry sa opakujú po desiatich, takže aby sme našli ďalší násobok 13, ktorý končí 7, musíme sa posunúť o 10 násobkov 13-ky. Musíme teda pripočítať $10\cdot13=130$.
Ale to je predsa výborné! 130 je deliteľné 65 bezo zvyšku a teda nech ho pripočítavame akokoľvek veľakrát, zvyšok po delení 65 bude stále taký istý.
Zistili sme, že zvyšok pre prvé vyhovujúce číslo je 61 a dokázali sme, že všetky ostatné vyhovujúce čísla budú dávať rovnaký zvyšok. Teraz môžeme konečne vyhlásiť: **Zvyšok po delení 65 bude VŽDY 61**.

Bodovanie:
určenie zvyšku len na základe pár vyskúšaných vyhovujúcich čísel – 3b.;
vysvetlenie, prečo bude zvyšok vždy rovnaký – 2b.

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

Pikomat je podporovaný Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy číslo LPP-0375-09