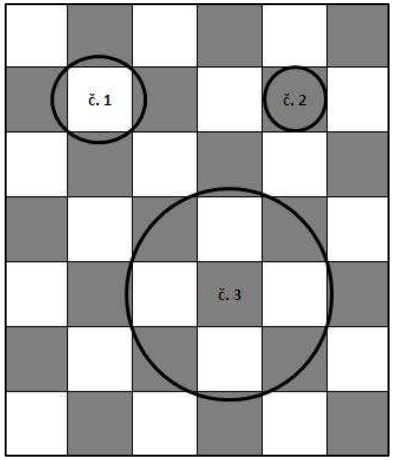
Vezmime si teda prípad, keď sa stred nachádza na nepokosenej časti záhrady. V okolí bieleho štvorca sú 4 čierne, ktoré s ním hraničia. Keď nakreslíme opísanú kružnicu bielemu štvorcu, obvod prechádza len čiernymi políčkami a ich spoločnými vrcholmi. V prípade, že sa pokúsime posunúť polomer kružnice na nejaký ďalší roh medzi čiernymi, zisťujeme, že už nejakou svojou časťou obvod prejde na bielu plochu. Z tohto môžeme vyvodiť záver, že najväčšiu časť záhrady si vie baran vyhrýzť len v okolí jedného bieleho štvorčeka (obr. č.1).



Najjednoduchšie riešenie druhej časti (stred v čiernom štvorci) je vpísanie kružnice do daného štvorca (obr. č. 2). Je to však jediná možnosť? Skúsme nájsť iné rohy medzi čiernymi štvorcami, ktoré sú všetky rovnako vzdialené od čierneho stredu. Ako vidíme na obrázku č.3, hneď nasledujúce rohy medzi štvorcami nám vyhovujú. Rovnako ako v prípade s bielym stredom, ďalšie rozširovanie kružnice sa nám už nepodarí bez toho, aby prechádzala bielymi časťami a preto je toto finálne riešenie.

Bodovanie:

správne nakreslené riešenia – 1b.+1b.; slovný postup – 3b.; dokopy 5b.;

Príklad M5: Večera. *Opravovala Veronika „Nika“ Jankovičová.*

Na začiatku máme kuriatka rozdelené do dvoch skupiniek. K trom miskám sa však rozdelia tak, že z každej skupinky je pri určitej miske len jedno kuriatko. S určitosťou vieme povedať, že Kikirík je pri miske s Pierkom (s Nôžkou a Zobáčikom je spolu v skupinke, Škrupinku pozoruje pri inej miske a nemá rád to, čo chutí Stebielku). A keďže Stebielko šteboce so Zobáčikom (z druhej skupinky), ktorý je pri inej miske, zostávajúce štyri kuriatka nám vytvoria dvojice: Škrupinka so Zobáčikom a Stebielko s Nôžkou.

Teraz týmto dvojiciam dokážeme podľa ostatných informácií prideliť zrnká, ktoré večerajú, aj farby misiek, pri ktorých sú, pretože to, čo platí pre jedno kuriatko z dvojice, bude automaticky platiť aj pre druhé kuriatko.

Stebielko a Nôžka: nejedávajú ovos (Stebielko) ani pšenicu (Nôžka). Teda večerajú ***jačmeň*,** ktorý je podľa informácií ***v modrej miske*.**

Škrupinka a Zobáčik: nejedia zo zelenej misky (Škrupinka) a majú radi buď jačmeň, alebo pšenicu. Keďže jačmeň už jedia Stebielko a Nôžka z modrej misky, pre túto dvojicu zostáva ***pšenica v červenej miske***.

Kikirík a Pierko: nejedia z červenej misky (Kikirík). To by sedelo, pretože jediná miska, ktorá zostala voľná, je ***zelená miska*** a musí v nej byť ***ovos***.

Bodovanie:

riešenie + popísaný postup – 5b.; bez postupu – 2b.; nejaký z hore uvedených faktov – 0,5b.;

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

podporuje odborný rast organizátorov seminára

PIKOMAT, 27. ročník   šk. rok 2009/2010

PIKOMAT

Vzorové riešenia 1. série, kategória 5-6

Príklad M1: Hugov návrh. *Opravoval Michal „Miško“ Szabados.*

V tejto úlohe si bolo treba predovšetkým poriadne uvedomiť, ako sa násobí a pritom nezabudnúť na prenášanie zvyškov. Najprv si cifry hľadaného päťciferného čísla označme ***ABCDE*** a prenášané zvyšky po násobení ***Z1***, ***Z10***, ***Z100***, ***Z1000*** a ***Z10000*** tak, že ***Z1*** je zvyšok prenesený z jednotiek, ***Z10*** z desiatok atď. (obr.1). Keďže po násobení dostaneme opäť päťciferné číslo, ***Z10000*** musí byť ***0***. Skúsme teda postupne určovať jednotlivé cifry:

```
                          A B C D E
                                × 4
+Z10000 +Z1000 +Z100 +Z10 +Z1
                          E D C B A
```

Vieme, že výsledok je päťciferný, takže je *menší ako 100 000*. Pôvodné číslo preto musí byť *menšie ako 25 000*. Z toho vyplýva, že cifra **A** môže byť iba **1** alebo **2**. Po násobení **E*4** nám však určite vznikne párne číslo, takže spomedzi **1** a **2** pre **A** ostáva len cifra ***A = 2***.

Keďže **A=2**, pôvodné číslo bude *väčšie alebo rovné 20 000*. Tým pádom číslo po vynásobení bude *väčšie alebo rovné 80 000*. Takže prvá cifra výsledku **E** musí byť **8** alebo **9**. **E** je zároveň posledná cifra pôvodného čísla. Už vieme, že keď ju vynásobíme 4, dostaneme A=2 a prenesený zvyšok Z1. Takže súčin **E*4** musí končiť dvojkou, čo pre **E=9** (9.4=3**6**) nesedí. Ak **E=8** (8.4=3**2**), tak je posledná cifra **2**, čo sedí, prenesený zvyšok ***Z1=3*** (8.4=**3**2). Takže ***E = 8***.

```
               2 B C D 8
                     × 4
+0 +0 +Z100 +Z10 +3
               8 D C B 2
```

Pozrime sa teraz na násobenie prvej cifry A=2. Vynásobíme ju štyrmi, pripočítame zvyšok Z1000 a vieme, že nám musí vyjsť **E=8 (2*4+Z1000 = 8)**. Tým pádom ***Z1000*** musí byť ***0***, čo vlastne znamená, že po násobení cifry **B** sa neprenesie žiaden zvyšok **(B*4+Z100 < 10)**. Preto **B** môže byť iba **0**, **1** alebo **2**. Na opačnej strane vo výsledku dostaneme **B** tak, že vynásobíme **D*4** a pripočítame zvyšok **Z1=3**, z čoho každopádne dostaneme nepárne číslo (končiace nepárnou cifrou). Preto pre **B** spomedzi **0**, **1** a **2** ostáva len cifra ***B = 1***.

D určíme tak, aby po vynásobení dalo číslo končiace na **B=1**. Ak **D*4+3** musí končiť na jednotku, potom **D*4** musí končiť na **8**, čomu vyhovujú jediné dve hodnoty **D**: **2** a **7**.

Vo výsledku dostávame cifru **D** ako **B*4+Z100 = 4+Z100**. Vyššie sa žiaden zvyšok neprenáša (**Z1000=0**), čiže **4+Z100** je jednociferné číslo a teda *najmenšia možná hodnota jeho poslednej (jedinej) cifry* **D** je **4**. Takže nutne ***D = 7***.

Keď už vieme všetky ostatné cifry, na **C** nám zostalo 10 možností. To je dosť málo na to, aby sme všetky skúsili ručne. Ako jediné riešenie vyjde ***C = 9***, pretože **21978*4=87912**.

Ako vidíme, kuriatkam by číselné mená nestačili.

Bodovanie:

výsledok – 1,5b.; podľa úspešnosti v odkrývaní jednotlivých cifier – 2b. a viac;

Príklad M2: Stajňa. *Opravoval Juraj „Juro“ Pavlovič.*

Stajňa sa skladá z rovnako veľkých štvorcových boxov, z ktorých každý je ohraničený práve 4 stenami. *V prvom roku mala stajňa jediný box (4 steny)*. Každým ďalším rokom *pribudnú dva boxy* (po jednom na každom konci pomyselného písmena L). Keďže každý nový box susedí práve jednou stenou s práve jedným minuloročným boxom, nie je ťažké domyslieť, že na jeho „prístavbu“ budem potrebovať iba 3 nové steny, pretože tú štvrtú bude mať spoločnú s minuloročným boxom. Takže viem, že každým rokom *pribudnú 2 boxy a teda 2*3steny = 6 stien*.

Najdôležitejšia otázka pri tomto riešení, ktorú si však mnohí nepoložili, znela: *ako znie otázka?*

1. Viem dopredu povedať, koľko stien bude mať stajňa v nasledujúcich rokoch? Poznám počet na začiatku a viem, ako sa tento počet bude v priebehu ďalších rokov meniť. Takže po krátkom zamyslení... ÁNO, VIEM to dopredu povedať.
2. Ako to zistím? Tu mnohí z Vás len vypísali prvých niekoľko možností, príp. povedali, že „to bude vždy +6“. Nie je na tom nič nesprávne, no ešte stále sa z toho nedozviem, koľko teda tá stajňa bude mať stien napríklad v roku 18; alebo roku 167. Preto je najlepšie zistiť (vyjadriť) počet stien pre ktorýkoľvek rok – rok X. Začíname prvým rokom so 4 stenami. Každým *novým* rokom pribudne 6 stien. Koľko bude tých nových rokov. Nuž, keďže všetky roky okrem prvého sú nové, ich počet bude X-1. Čiže k prvému roku pričítam (X-1)*6 stien a teda dostanem, že počet stien ***S = 4+(X-1)*6***. (niektorí to roznásobili na ***S=(6*X)-2***) Hurá, už ľahko zistím počet stien pokojne aj v 2009. roku!
3. Nezabúdať na ďalšie otázky v zadaní!!! Existuje aj vzťah medzi počtom boxov a stien? Aký? Keď je medzi dvoma alebo viacerými veličinami nejaký vzťah, neznamená to, že sa majú alebo nemajú navzájom rady. Znamená to iba toľko, že sú nejako prepojené, že jedna závisí od druhej. Keď tento vzťah poznám, viem potom na základe jednej veličiny zistiť (vypočítať) tú druhú. Presne ako v predošlej otázke s rokmi a počtom stien. Je to teda skoro to isté. Keď viem, že nový box znamená 3 nové steny a že všetky boxy okrem prvého boli kedysi nové, celkový počet stien bude jednoducho (počet boxov-1)*3 + prvý box, teda ***S = (N-1)*3 +4*** (niektorí to roznásobili na ***S = (3*N) - 1***).

Bodovanie:

dva vzťahy (všeobecné rovnice) – 5b.; jeden vzťah – 3b.; vzťah typu „bude to vždy +6“, bez všeobecného riešenia – 2,5b.; rozpísaných prvých pár rokov – 1 až 2b.; +/- body za vysvetlenie;

Príklad M3: Lupienky. *Opravoval Michal „Kesy“ Kesely.*

Povedzme si to narovinu, tento príklad bol ťažký. Aj svojou povahou, aj tým, že v ňom bolo treba myslieť na veľa vecí. A nakoniec aj počtom riešení. Pri pozornom prečítaní zadania (áno, zadania sa oplatí čítať pozorne a viackrát) si všimneme, že chceme jednoznačne určiť len *počet kvietkov*. Počet lupienkov na jednotlivých kvietkoch jednoznačný byť *nemusí* (pokiaľ samozrejme spĺňa podmienky zo zadania). Túto drobnosť niektorí z vás nepostrehli a tým pádom riešili úplne inú úlohu.

Kvety si rozdeľme na červené a modré (Č a M), bude sa nám lepšie počítať. Č a M kvietkov je rovnaký počet, preto idú akoby *spárovať*. Takže keď sčítame počet lupienkov na Č kvietku s počtom lupienkov na M kvietku a toto celé vynásobíme počtom kvietkov jednej farby, dostaneme počet lupienkov na hladine (príklad: Č aj M kvietkov je po 19, Č má 7 lupienkov, M má 8 lupienkov. Jeden Č a M kvietok majú spolu 15 lupienkov, takže všetky kvietky majú spolu 15*19=285 lupienkov). Všimnite si, že nenásobíme celkovým počtom kvietkov (ktorý je samozrejme párny), ale počtom kvietkov jedného druhu. Pozor, dôležitá úvaha: *ak naopak celkový počet lupienkov vydelíme počtom kvietkov jedného druhu, dostaneme súčet lupienkov na jednom Č a jednom M kvete*. Všetky delenia v tomto riešení majú tvar ***Počet lupienkov na hladine : Počet kvietkov jedného druhu = Súčet lupienkov Č a M kvetu***.

Najprv si ukážme, prečo na hladine nemohlo byť, povedzme, 240 lupienkov. Pri 240 lupienkoch by sa na hladine dokopy mohlo vyskytovať 100 Č a 140 M lupienkov, ktoré mohli pochádzať z piatich Č a piatich M kvetov (Č kvet by mal 20 lupienkov a M kvet 28) - spolu z 10 kvietkov. Takisto tam však mohli byť 4 Č a 4 M kvietky (Č kvet by mal 25 lupienkov a M kvet 35), čo je dokopy 8 kvietkov. Takže pôvodne pri rybníku mohlo byť aj 8, aj 10 kvietkov (určite by ste našli aj ďalšie možnosti). A to je *nejednoznačné*. Preto 240 *nemôže* byť riešením našej úlohy.

Čím je číslo 240 také zvláštne, že nemôže byť riešením našej úlohy? Dá sa bezo zvyšku deliť príliš veľa menšími číslami. Ide vydeliť napríklad číslom 10 (čo bude počet Č kvietkov) a dostaneme 24 (to bude súčet lupienkov na Č a M kvete); ale dá sa deliť aj číslami 4, 8, 12... Takže čím viac číslami možno deliť, tým viac možností na počet kvietkov dostaneme. Ale počet kvietkov má byť jednoznačný. To nás navádza na to, aby sme hľadali také čísla, ktoré sa dajú deliť bezo zvyšku len veľmi malým počtom iných čísel.

Takým číslom je napríklad 223. Toto číslo sa dá bezo zvyšku deliť len číslami 1 a 223. To nám ale nepomôže, lebo podľa našej dôležitej úvahy by nám vyšlo, že buď počet lupienkov na kvete alebo počet Č kvietkov je 1. To je ale v rozpore so zadaním.

Takže by sme radi objavili číslo, ktoré sa dá deliť bezo zvyšku len málo číslami, ale zase nie úplne málo. Skúsme napríklad také číslo 221. To sa dá deliť číslami 1, 13, 17 a 221. Už vieme, že 1 a 221 nespĺňajú zadanie, takže sa na ne vykašleme. Potom 221:13=17, takže Č kvietkov mohlo byť 13 a súčet počtu lupienkov na jednom červenom a modrom kvete by mohol byť 17. Ale 221:17=13, takže Č kvietkov mohlo byť aj 17 a súčet mohol byť 13. Takže počet kvietkov je opäť *nejednoznačný*.

Zistili sme teda, že ak sa číslo dá deliť len 2 číslami, je to málo a ak sa dá deliť 4 číslami, je to už veľa. Takže hľadáme všetky čísla, ktoré sa dajú deliť práve 3 číslami. Medzi 200 a 300 je také číslo jediné, a síce 289 (toto môžeme zistiť aj skúšaním). 289 sa dá deliť číslami 1, 17 a 289. Zase 1 a 289 nám nepomôžu, tak ich vylúčime. Ale 289:17=17, takže počet Č kvietkov aj súčet lupienkov Č a M kvietku musí byť 17, čo už je *jednoznačné*.

Tu to ale bohužiaľ nekončí. Po ešte pozornejšom prečítaní zadania zistíme, že počet lupienkov na kvete je aspoň dva a počet lupienkov na Č a M kvete je rôzny. Takže ak Č kvietky majú 2 lupienky, tak M musia mať aspoň 3. To znamená, že súčet počtu lupienkov Č a M kvetu je aspoň 5. Prejdime k veci.

Vezmime si číslo 201. To sa dá deliť číslami 1, 3, 67 a 201. Opäť 1 a 201 ignorujeme. No 201:67=3, čo tiež neprichádza do úvahy, lebo súčet lupienkov Č a M kvetu je *aspoň 5*, takže nám opäť ostáva jediná možnosť, ktorá je tým pádom jednoznačná, a síce 201:3=67.

Takýchto čísel existuje ešte 16 a okrem 201 sú to: 202 (202:2=101), 206 (206:2=103), 213 (213:3=71), 214 (214:2=107), 218 (218:2=109), 219 (219:3=73), 226 (226:2=113), 237 (237:3=79), 249 (249:3=83), 254 (254:2=127), 262 (262:2=131), 267 (267:3=89), 274 (274:2=137), 278 (278:2=139), 291 (291:3=97), 298 (298:2=149).

Takže na rybníku mohlo plávať 201, 202, 206, 213, 214, 218, 219, 226, 237, 249, 254, 262, 267, 274, 278, 289, 291 alebo 298 lupienkov.

Bodovanie:

riešenie 289 – 5b.; 17 riešení z druhej skupiny – 5b. (pokiaľ ste tu na nejaké zabudli, išli desatinky dole); obe riešenia –5b. a veľká pochvala; náznaky postupu – 1 až 3b.;

Príklad M4: Baranov priestor. *Opravoval(a) Pavol „Tamarka“ Hronský.*

V tomto príklade sme mali preskúmať 2 prípady: čo najväčšiu kružnicu, ktorá má stred na pokosenom (bielom) štvorci a čo najväčšiu kružnicu, ktorá má stred na nepokosenom (čiernom) štvorci. Pre obe pritom musí platiť, že prechádzajú LEN nepokoseným (čiernym) územím. Keďže ide o šachovnicovú záhradu a teda štvorce sú všetky rovnako veľké, je pre nás výhodné zvoliť si stred kružnice vždy v strede daného štvorca. Tiež si treba uvedomiť, že kružnica má všetky svoje body rovnako vzdialené od stredu, a teda *aby neprechádzala bielymi časťami, musí prechádzať rohmi, kde sa čierne štvorce navzájom dotýkajú* (okrem špeciálneho prípadu, keď je kružnica do čierneho štvorca vpísaná).