Príklad M5: Strážcovu hádanku *opravoval Martin „Panda“ Svetlík*

Z druhej vety („keď on bude mať toľko rokov, čo ja teraz...“) vieme, že prvý strážca (ten, čo hovorí) je starší. Označme si rozdiel ich vekov ako r, vek prvého ako p a vek druhého ako d. Potom si môžeme vyjadriť $p = d + r$ (prvý je o rozdiel starší ako druhý). Prvý strážca mal toľko, ako má druhý teraz, práve pred r rokmi (porozmýšľajte, prečo), a vtedy mal druhý $d - r$ rokov. A tak z prvej strážcovej vety Bystrík vie, že prvý má dvakrát toľko rokov ako druhý pred r rokmi, teda $p = 2.(d - r)$, to sa rovná $2d - 2r$. A keďže vieme, že $p = d + r$, môžeme si za p dosadiť $d + r$. Čiže $d + r = 2d - 2r$. Takáto rovnica funguje ako váhy – ak chceme zachovať rovnosť, musíme robiť na oboch stranách to isté (keď z jednej strany uberieme 5, musíme aj z druhej; keď na jednu stranu dáme dvakrát toľko, musíme aj na druhú...). Čiže pridáme $2r$, a uberieme d. Dostaneme rovnosť $d - d + r + 2r = 2d - d - 2r + 2r$. Po úprave $3r = d$. Čiže druhý má trikrát viac rokov, ako je rozdiel medzi ním a prvým strážcom.
Zamerajme sa teraz na druhú strážcovu vetu. Ten mladší bude mať toľko, koľko teraz starší práve o r rokov (zároveň ale bude mať aj starší o r viac). A spolu budú mať 63, čiže $p + r + d + r = 63$. Keďže $p = d + r$, môžeme si rovnicu upraviť na $(d + r) + r + d + r = 63$. A keďže $d = 3r$, po dosadení dostane Bystrík vzťah: $3r + r + r + 3r + r = 63$, po úprave $9r = 63$. Z toho si ľahko vypočíta, že $r = 7$.
To znamená, že rozdiel medzi prvým a druhým strážcom je 7 rokov. Teraz už Bystrík len jednoducho vyjadrí zo vzťahu $3r = d$ vek druhého strážcu – 21 rokov a zo vzťahu $p = d + r$ vek prvého: 21 + 7 = 28. Prvý strážca (ten, čo hovorí) má teda 28 rokov, a jeho druh má 21 rokov.

Bodovanie: Správny výsledok – 28 a 21 rokov – 2 body, správny postup a odôvodnenie za 3 body. Výsledok 42 a 21 – 0 bodov. Iné nesprávne výsledky – podľa správnosti resp. nesprávnosti myšlienkových postupov.

Poznámka: Tým z Vás, ktorí si myslia, že v tomto vzoráku vysvetľujem aj samozrejmosti, sa ospravedlňujem, pretože neviem na akej úrovni je každý z Vás, keďže niektorí to riešili metódou „pokus-omyl“, a iní pri sústave dvoch rovníc použili dokonca odčítanie rovníc, čo som sa napr. ja učil až v kvarte.

Rada č.1: v Pikomate nie je dôležitý zápis, ako sa učíte v škole pri slovných úlohách. Za neprítomnosť zápisu sa body nestŕhajú. V Pikomate vás takýto zápis môže dokonca zmiasť, pretože úlohy sú často zostavené tak, že ľahký, krátky a prehľadný zápis je veľmi ťažké napísať, oveľa jednoduchšie býva zostaviť si rovnicu, tabuľku, alebo niečo podobné.

Rada č.2: Keď sa pomýlite, nedávajte chybnú vetu (slovo, písmeno...) do zátvorky, ale prečiarknite to (nie „zaškrtajte“). Do zátvorky sa totiž dávajú poznámky, ktoré bližšie určujú, alebo vysvetľujú text, ktorý je napísaný pred nimi. Ušetríte tým nejaké bodíky pre seba, keďže opravovateľ bude vedieť, že to nemá brať do úvahy.

PIKOMAT, 23. ročník **školský rok 2005/2006**

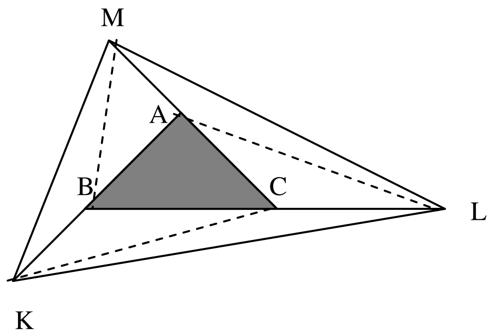
organizátor korešpondenčného seminára — podporuje odborný rast organizátorov seminára

Vzorové riešenia 2. série kategórie 5-6

Príklad M1: Kráľovský park *opravoval Ondrej „Bugy“ Bogár*

Najlepším spôsobom ako začať správne riešiť tento príklad bolo nakresliť si polohu stanu voči parku (tí čo to neurobili, sa potom mýlili). Stan v parku mal vyzerať ako na obrázku. Prvý správny krok je za nami, teraz nasleduje ten druhý a najdôležitejší. Vzorec pre obsah trojuholníka je $S = (a.v_a)/2$. Preto ak budú mať dva trojuholníky rovnako dlhé strany a aj rovnako veľké výšky na tieto strany, tak majú aj rovnaké obsahy. Teraz nám stačí nájsť v parku také dvojice trojuholníkov, ktoré majú rovnako veľkú stranu a výšku na túto stranu, pričom obsah jedného z trojuholníkov poznáme(plocha stanu)
Vypíšem teraz trojuholníky s rovnakou výškou a rovnakými stranami. To, že sú strany rovnako dlhé vieme zo zadania, a keďže ležia na jednej priamke, tak ich výška k protiľahlému vrcholu je rovnaká.

$\triangle$BKC a $\triangle$ABC, $|BK| = |AB| \rightarrow S_{\Delta BKC} = S_{\Delta ABC}$
$\triangle$LCA a $\triangle$CBA, $|CL| = |AC| \rightarrow S_{\Delta LCA} = S_{\Delta CBA}$
$\triangle$MAB a $\triangle$ACB, $|AM| = |AC| \rightarrow S_{\Delta MAB} = S_{\Delta ACB}$
$\triangle$KBM a $\triangle$BAM, $|BK| = |AB| \rightarrow S_{\Delta KBM} = S_{\Delta BAM}$
$\triangle$LCK a $\triangle$CBK, $|CL| = |BC| \rightarrow S_{\Delta LCK} = S_{\Delta CBK}$
$\triangle$MAL a $\triangle$ACL, $|AM| = |CA| \rightarrow S_{\Delta MSL} = S_{\Delta ACL}$

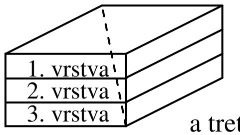


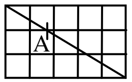
Vidíme, že okrem stanu je v parku ešte 6 trojuholníkov, ktoré majú rovnaký obsah ako stan (všetky tieto obsahy sa navzájom rovnajú zo vzťahov vyššie spomenutých). Preto Bystrík môže vypočítať plochu parku ako sedemnásobok plochy stanu.

Bodovanie: Ak ste správne určili polohu stanu v parku, máte 2 body. Za snahu niečo vyrátať ste mohli získať ďalšie 2 body. Ak ste počítali pre konkrétny trojuholník, tak ste mohli získať max. 4,5b. Ak ste svoj postup nezdôvodnili, tak ste samozrejme o nejaký ten bodík prišli.

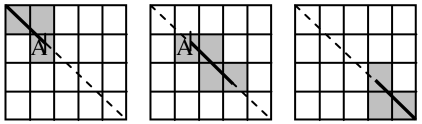
Príklad M2: Pálenie kociek *opravoval Matej „Matt“ Duník*

Tento príklad je jednoduchší, ako sa zdá na prvý pohľad. Ak vieme, čo je to telesová uhlopriečka a vieme si ju aj predstaviť, tak sme na najlepšej ceste. Ceste kam? Nakresliť ju. Najjednoduchšou možnosťou, ako to urobiť, je podľa mňa rozdeliť si kváder (5x4x3) na vrstvy (napríklad na tri vrstvy 5x4, aby nebolo veľa kreslenia). Cez každú z týchto vrstiev prechádza len časť uhlopriečky – len jedna tretina.





Takto vyzerá priestorový obrázok nášho kvádra s vyznačenou telesovou uhlopriečkou a vrstvami a ďalej pohľad zhora, kde jasne vidíme, že prvá tretina uhlopriečky je v prvej vrstve, druhá v druhej a tretia tretina v tretej vrstve. Bod A je miesto, kde uhlopriečka prechádza z prvej vrstvy do druhej a je vyznačený aj na ďalších obrázkoch.



A tu už sú jednotlivé vrstvy od prvej po tretiu, vždy s vyznačenou časťou uhlopriečky, ktorá cez ne prechádza a s kockami, do ktorých zasahuje. Spolu ich je 10, takže draci chrlili oheň *10.10 sekúnd = 100 sekúnd.*

Niektorým z vás sa podarilo nakresliť si 3 rôzne strany kvádra a už podľa týchto troch obrázkov presne vymenovať kocky, ktoré boli preťaté uhlopriečkou. Priestorovej predstavivosti sa medze nekladú, ale nikto nie je dokonalý, takže ju treba doložiť aj príslušnými obrázkami.

Ďakujem za pozornosť :-)

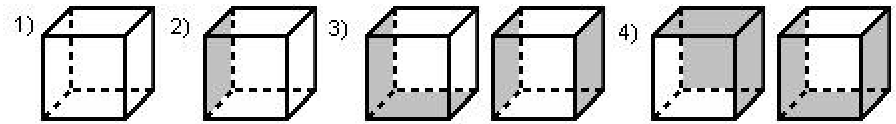
Bodovanie: Iba za správnu odpoveď so správnym postupom (aj iným, ako je tu) 5b. Za modelovanie pomocou kociek, stavební, laniek a špajdlí podľa toho, nakoľko ste trafili výsledok, ale ani za správnu odpoveď nebol plný počet (treba aspoň kvapku matiky). Ak ste brali do úvahy len stenovú uhlopriečku 1,5b. Za ostatné, horšie postupy, menej presné obrázky 0b – 1b.

Príklad M3: Úlohu starého draka *opravovala Alexandra „Sašenka“ Podolová*

Kocky sú určite rôzne, ak majú zafarbený rôzny počet stien. Niektoré však môžu byť rôzne aj vtedy, keď majú zafarbený rovnaký počet stien. Podľa toho si ich aj nakreslíme. Začneme s čisto bielou kockou a budeme pridávať čierne steny.

1) 6 bielych stien. Kocky majú všetky steny biele – takáto je však len jedna.
2) 5 bielych stien a 1 čierna stena. Tu je tiež len jedna možnosť – nech nafarbím ktorúkoľvek jednu stenu, vždy je to po otočení taká istá kocka.
3) 4 biele steny a 2 čierne steny. Vychádzame z kocky s jednou čiernou stenou. Mám len dve možnosti, zamaľovať na čierno stenu susediacu so stenou, ktorá už čierna je (a po otočení vznikne vždy taká istá kocka – rozmyslite si!) alebo zamaľujem stenu naproti čiernej stene. Takže to máme dve kocky.
4) 3 biele aj čierne steny. Vychádzame z kociek s dvoma čiernymi stenami. V prvom prípade (mám zafarbené 2 susedné steny) môžem zafarbiť buď stenu susediacu s oboma čiernymi stenami alebo stenu susediacu práve s jednou čiernou a jednou bielou stenou (popremýšľajte, prečo nejestvuje stena, ktorá by sa nedotýkala nejakej čiernej steny). To sú dve možnosti. V druhom prípade nech zafarbím akúkoľvek stenu, vždy dostanem to isté ofarbenie. Navyše je totožné s jedným z vyššie spomenutých, takže ostávame na dvoch rôznych kockách.
5) 2 biele a 4 čierne steny. Toto je vlastne to isté ako prípad číslo 3, iba prehodím farby, čo počet možností zachováva, teda máme dve nové možnosti.
6) 1 biela stena a 5 čiernych – obdobne ich je toľko isto ako tých s jednou čiernou. Jedna možnosť.
7) 6 čiernych stien. Tu už existuje len jedna takáto kocka.

Dokopy je teda 10 rôznych kociek.



Pre prípady 5), 6) a 7) si len vymeňte farby:-)

Bodovanie: Strhávala som 0,5 bodu za každú kocku, ktorá chýbala alebo bola navyše. Za nenapísanie postupu som strhla takisto 0,5 bodu.

Príklad M4: Koľko drakov? *opravovala Katka Smolárová*

Vieme, že dve tretiny drakov práve sedí na troch štvrtinách stoličkách. Označme si počet drakov *d* a počet stoličiek *s*. Potom vieme napísať, že $2/3\ d = 3/4\ s$. Túto rovnicu vynásobíme 4, vydelíme 3 a dostaneme $8/9\ d = s$. Vieme, že počet drakov musí byť celé číslo, takže počet drakov musí byť deliteľný 9. Taktiež musí byť párne, pretože na oslavu bolo pozvaných niekoľko párov drakov. Jediné číslo, ktoré je párne, deliteľné 9 a zároveň menšie ako 30 (podmienka zo zadania) je 18, a teda na hostinu bolo pozvaných 18 drakov.

Bodovanie: 1 bod bol za zistenie, že počet drakov musí byť deliteľný troma; 0,5 bodu za zistenie, že musí byť párny; 0,5 bodu za správny výsledok. 1,5 bodíka bolo za myšlienku, že 2/3 z drakov musia byť ešte deliteľné troma a jej odôvodnenie, no a posledného 1,5 bodu bolo za ukázanie, že toto je jediné správne riešenie a teda iná možnosť neexistuje.