Príklad M5: Krúžky na strelnici *opravoval Grigorij Griša Mesežnikov*

riešenie so zvyškami:

Väčšina zo správnych riešení (ktorých nebolo veľa, príklad bol naozaj ťažký) využívala tento spôsob riešenia. Prvá vedomosť, ktorú musíme mať (a ktorú malo asi 90 percent riešiteľov) je, že zvyšok po delení troma je len 0,1 alebo 2. (Ak to niekomu stále nie je jasné, nech sa nad tým dobre zamyslí!). Druhá vedomosť, ktorú musíme mať (a túto malo už podstatne menej riešiteľov:) je, že ČÍSLICA znamená prirodzené číslo od 1 do 9 a nula. Teda {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Tretia vedomosť je už podstatne náročnejšia. Všetky číslice, ktoré môžeme zapísať do dolného riadku si vieme podľa deliteľnosti troma rozdeliť do troch skupín. A skupina {0, 3, 6, 9}; B skupina {1, 4, 7} C skupina {2, 5, 8}. Všetky číslice, v rámci jednej skupiny, sú si rovnocenné. Je teda jedno, či do šedých políčok vpíšeme 3 a 5, alebo či vpíšeme 6 a 8. Znamená to, že nám z každej skupiny stačí vybrať jedno číslo a to postupne vkladať do pyramídy. Takto dostávame z troch skupín tri čísla, ktoré môžeme uložiť 9 rôznymi spôsobmi. Zisťujeme, že vo všetých prípadoch sa **na vrchole vždy objavuje len 0**.

riešenie sčítaním:

Niektorý špekulatívnejší riešitelia si povedali, že sčítavať čísla od samého začiatku dá ten istý výsledok, ako hrať sa so zvyškami. Tento spôsob spočíva v tom, že do šedých políčok vpíšeme ľubovoľné číslice (A, B) a postupne všetko sčítavame až k vrcholu. Číslo na vrchole je deliteľné troma,. čo znamená, že zvyšok po delení troma je 0. Prečo môžeme postupovať aj bez zisťovania zvyškov a vyjde nám to? Uvedomte si, že každé číslo sa skladá z takých dvoch zložiek 3- násobku nejakého malého čísla a zvyšku (0, 1, 2). Pri prvom riešení sme z celého čísla usekli len ten zvyšok a pri druhom riešení berieme celé číslo. Lenže tá zmena spočíva len v tom, že so zvyškom pričitujeme časť, ktorá je deliteľná troma (3k). Takže to významovo nič nemení.

	3A + 3B + 3		
	2A + B + 1	A + 2B + 2	
1 + A	A + B	B + 2	
1	A	B	2

Komentár: Správnych riešení bolo málo. Nie je jednoduché správne dokázať pointu príkladu a najmä bolo vás veľa takých, čo skúsili tri - štyri situácie a z toho spravili záver, že vyjde vždy nula. Výsledok síce máte dobre, ale my sme chceli, aby ste sa to pokúsili dokázať. Keď chcete skúšať je to v poriadku, ale potom treba overiť úplne VŠETKY MOŽNOSTI. A keby ste na jednu zabudli, tak to už nie je dobre.

Bodovanie: 5 bodov za správne riešenie s postupom, 3,5 až 4,8 bodov za správne riešenie s postupom, ale určitými chybami, 0,5 až 2,5 bodu za správne riešenie bez postupu s dobrými myšlienkami, 0 bodov za nesprávne riešenie

PIKOMAT ,**22. ročník** **šk. rok 2004/2005**

P-MAT n.o. NADÁCIA INGENIUM

organizátor korešpondenčného seminára podporuje odborný rast organizátorov seminára

Vzorové riešenia 4. série kategórie 5-6

Príklad M1: ***Vstup do parku*** *opravovala Katarína Kaťa Antoničová*

Tento príklad bol možno ťažší preto, lebo základom celého problému bolo pochopenie toho, čo to znamená „nájsť stratégiu“. Nájsť stratégiu znamená nájsť spôsob, ktorým má jeden z hráčov, v našom prípade dieťa, ťahať, pričom táto stratégia by mala fungovať bez ohľadu na to, ako ťahá druhý hráč, teda šašo. Vo chvíli, ako niekto do riešenia napísal niečo v zmysle „šašo potom potiahne takto“ alebo „šašo musí ťahať tam a tam“, som strhávala body prakticky na minimum, pretože ste očividne nepochopili, čo to znamená nájsť stratégiu. Šašo má totiž svoju vlastnú hlavu a ťahá si, ako sa mu zapáči. Nemôžeme mu jeho ťahy určovať.A teraz k tej stratégii:

Ideálny prípad nastane, keď obidva kamene sú na políčku B a na ťahu je šašo, ktorý už musí potiahnuť na políčko A a teda prehrať. Ako však tento stav dosiahneme? Jednoducho. Prvé začína ťahať dieťa a potiahne kameň z políčka J na políčko F. Oba kamene sú teda na tom istom políčku, na ťahu je šašo. Ten môže potiahnuť hociktorým kameňom kamkoľvek a dieťa po ňom jeho ťah len zopakuje tým druhým kameňom. Skôr či neskôr teda šašo prehrá (kto neverí, nech si to skúsi).

A na záver ešte zdôvodníme, prečo nemôže začať šašo. Jednoducho preto, lebo keby potiahol svojim kameňom z políčka J na políčko F a mal v pláne len kopírovať ťahy súpera, dieťa by muselo prehrať. Takže začínať musí vždy dieťa.

Bodovanie: 0 bodov za prípad, keď ste určovali ako musí ťahať šašo, aby dieťa vyhralo, teda neponechal šašove ťahy „náhode“, 0,5 – 3 body v prípade, že ste pochopili, čo je to stratégia, ale nepodarilo sa vám odhaliť víťaznú stratégiu, rozhodoval počet dobrých myšlienok.

Príklad M2: ***Kto rozbil zrkadlo*** *opravovala Kami Vyslocká*

a) Ak všetky deti hovoria pravdu...

tak hovorí pravdu aj Zulka. Zulka priamo obvinila Luu, teda nikto iný nemôže byť vinníkom (ak by bol iný vinník, Zulka by klamala) je to teda buď Lua, alebo úloha nemá riešenie. Predpokladajme, že vinníčkou je Lua. Potom: „Miňo to neurobil.“ je pravda. „Bolo to dievča.“ je pravda. „Bola to Lua“ je pravda. Vyhovuje – vinníčkou je LUA.

b) Ak práve tri deti hovoria pravdu...

Pozrime sa na Zulku. Sú dve možnosti: Ak Zulka vraví pravdu, tak vinníčkou je podľa nej LUA. Avšak ak je Lua vinníčka, všetci štyria hovoria pravdu. (skontrolujte ich výpovede) A pravdu majú vravieť práve traja. Teda Zulka klame. Lua, Miňo a Salik vravia pravdu, Zulka klame. Z toho dostávame: Miňo to neurobil. Bolo to dievča. Nebola to Lua. Vinníčkou je ZULKA.

c) Ak práve dve deti hovoria pravdu...

Zulka musí klamať (ten istý dôvod... Ak by neklamala, potom by všetci vraveli pravdu.) Ak klame Lua, klame nutne aj Miňo (tvrdia to isté – Miňovu nevinu). To by ale už klamali traja. Rovnako ak klame Miňo, klame nutne aj Lua. To by ale už klamali traja. Zostáva teda, že klame Zulka a Salik. Lua a Miňo vravia pravdu. Z toho dostávame: Nebolo to dievča. Nebola to Lua. Nebol to Miňo. Vinníkom je preto SALIK.

d) Ak ani jedno dieťa nehovorí pravdu...

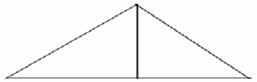
Dostáveme: Miňo to urobil. Nebolo to dievča. Nebola to Lua. Vinníkom je preto MIŇO.

Bodovanie: 0,2 b za (aspoň čiastočné) pochopenie zadania. Podúlohy a) až d):

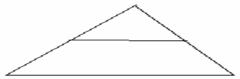
Samotné riešenie: 0,2 b nejednoznačné (správne aj nesprávne) / 0,5 správne, za vysvetlenie: 0,5 b overenie že ide o správne riešenie / 0,7 b overenie, že ide o jediné správne riešenie, (logickým postupom alebo vyskúšaním všetkých možností) Spolu maximálne: 0,2 + 1,2 + 1,2 + 1,2 + 1,2 = 5 bodov.

Príklad M3: ***Delenie trojuholníkov*** *opravovala Michaela Myška Němcová*

Vašou úlohou bolo krájať trojuholník tak, aby na výslednom pokrájanom trojuholníku bolo 4,5,6, alebo 8 trojuholníkov. Mame 2 možnosti ako rozdeliť trojuholník jednou usečkou:

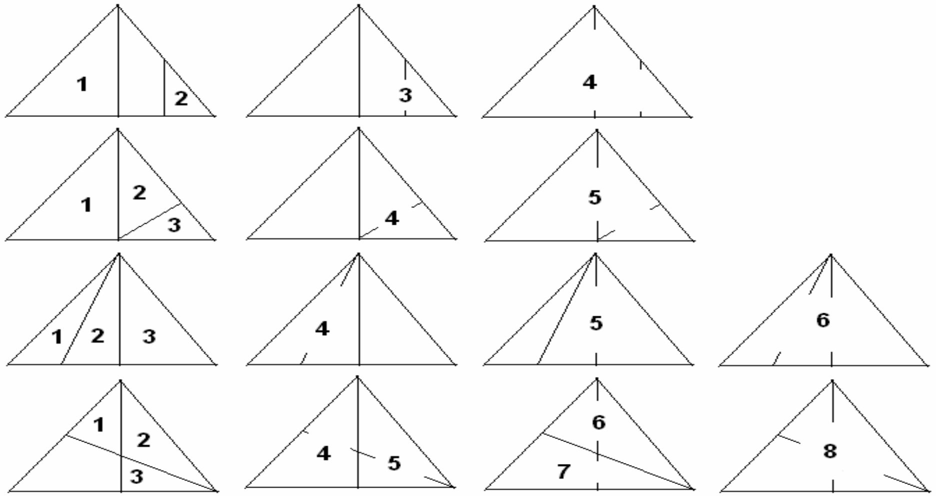


na 3 trojuholníky



na 2 trojuholníky

kombináciou týchto možností získame všetky riešenia:



Samozrejme že k niektorým krájaniam existuje aj viac riešení..

Bodovanie: Riešenia boli za 3body, postup ,obrázok ,zdôvodnenie za 2 body.

Príklad M4: Rytierska hra *opravoval Peter Peťo Halák*

Po druhom roztočení kruhu sa mal dostať do vedenia hráč „D". Po prvom roztočení mal 4 body. Hráč „C" mal viac bodov – až 5, preto v druhom roztočení musel D získať aspoň o 2 body viac ako C. Keďže sedia vedľa seba, tak musíme nájsť takú pozíciu kruhu, aby číslo, ktoré získa „D" bolo aspoň o 2 väčšie ako číslo napravo od neho. Takáto možnosť je však jediná – ak „D" získa 5 bodov, tak „C" získa iba 2 body. Pri všetkých ostatných možnostiach by „D" nezískalo aspoň o 2 body viac ako „C". Po druhom roztočení kruhu budú mať hráči nasledovné súčty bodov: A – 1 bod; B – 3 body; C – 7 bodov; D – 9 bodov; E – 7 bodov; F – 3 body. Zo zadania vieme, že po piatom roztočení celú hru vyhral „A". Zatiaľ má najmenej bodov – iba 1. Na najlepšieho po druhom kole – „D" – stráca 8 bodov, t.j. k tomu, aby „A" predbehlo „D", musí získať aspoň 9 bodov a to by ešte „D" nesmel získať ani jeden bod. Pri ďalšom postupe je dobré vypísať si tabuľku, v ktorej budeme mať prehľad, kto získa koľko bodov v jednotlivých polohách kolesa:

Hráč A	Hráč B	Hráč C	Hráč D	Hráč E	Hráč F
0	1	2	5	4	3
1	2	5	4	3	0
2	5	4	3	0	1
3	0	1	2	5	4
4	3	0	1	2	5
5	4	3	0	1	2

Ak by „A" získalo v ktoromkoľvek z nasledujúcich 3 roztočení 0 alebo 1 bod, tak by „D" získalo ďalší náskok (5 resp. 4 body), ktorý by už A nemal ako dobehnúť.

Ak by „A" získal 2 body, tak by „D" získalo síce iba 3 body, ale zároveň by „B" získal 5 bodov a mal by dokopy 8 bodov. K tomu, aby „A" predbehlo „D" by v takomto prípade potreboval v posledných dvoch roztočeniach získať po 5 bodov, to by ale „B" získal po 4 body a mal by viac ako „A", teda „A" by nemohol byť víťazom. Takže ani 2 body nemohol „A" získať v žiadnom kole.

Ak by „A" získal 3 body, tak by „D" síce dobehol o jeden bod, ale zasa „E" by získalo o 2 body viac ako „A" a na jeho predbehnutie by „A" potreboval už 9 bodov, čo nie je možné pri žiadnej polohe kolesa v ďalších 2 roztočeniach. „A" teda nemohol získať v žiadnom z ďalších roztočení ani 3 body. Ostali nám teda možnosti, že „A" získa 4 alebo 5 bodov vo zvyšných roztočeniach. Podobnou úvahou sa dá prísť na to, že ak by „A" získal viac ako raz 4 body, tak by už „F" mal taký náskok, že ho „A" nepredbehne. Ak by „A" získal vo všetkých 3 roztočeniach po 5 bodov, tak by mal na záver na rovnako 16 bodov s „C", ale to nevyhovuje zadaniu. Preto jedinou možnosťou je, ak vo zvyšných troch roztočeniach „A" získa práve raz 4 body a dvakrát po 5 bodov. Konečné počty bodov jednotlivých hráčov a priebeh je vidieť v tabuľke:

Roztočenie	Hráč A	Hráč B	Hráč C	Hráč D	Hráč E	Hráč F
1	1	2	5	4	3	0
2	0	1	2	5	4	3
3	4	3	0	1	2	5
4	5	4	3	0	1	2
5	5	4	3	0	1	2
SPOLU	15	14	13	10	11	12

Poznámka: poradie roztočení 3-5 mohlo byť ľubovoľné (3 rôzne možnosti)

Bodovanie: len výsledok – 1 bod, prípadne tabuľka priebehu kôl – 2,5 bodov; zdôvodnenie riešenia 1-2 body, vysvetlenie neexistencie inej možnosti 0,5 bodov.