veľa – bod *S* môže byť ľubovoľným bodom osi úsečiek okrem jej priesečníkov s úsečkami. Ďalší prípad, kedy neexistuje riešenie, je ak bod *S* síce konštrukčne nájdeme, ale nebude vyhovovať zadaniu – t.j. *ABS* a *CDS* nebudú rovnoramenné Δ. To nastane vtedy, ak bod *S* bude ležať na priamke vedenej *AB*, alebo na priamke vedenej *CD*. Keďže ale vieme, že súčasne *S* leží na osiach úsečiek, tento negatívny prípad môže nastať iba ak *S* leží v strede *AB* alebo *CD*. To nastáva iba vtedy, ak os niektorej úsečky prechádza stredom druhej úsečky (a osi nie sú totožné), alebo ináč povedané, spojnica stredov úsečiek *AB, CD* je kolmá na niektorú z úsečiek (ale nie na obe úsečky), alebo sú stredy totožné.

Bodovanie: za zabudnutie každej z možností (konštrukcia bodu *S*, rovnobežky so spoločnou osou, rovnobežky bez spoločnej osi, bod *S* na *AB* alebo *CD*) stratený 1 bod.

Vzorové riešenia 2. série letnej časti kategórie 5-6

organizátor korešpondenčného seminára

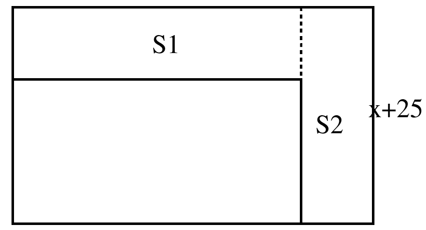
podporuje odborný rast organizátorov seminára

Príklad M1: Kráľovské pasienky *opravoval Peter Gašpi Gašparík*

Obsah obdĺžnika S1 vypočítame ako súčin jeho strán, S1 = 25.(x + 65). Obsah obdĺžnika S2 vypočítame ako 25.(x + 25) (viď obrázok). Vieme, že lúka po zväčšení bude mať obsah o 10000m² väčší. Potom súčet týchto spomínaných obsahov musí byť 10000. Dostávame

$$\begin{aligned} 25x + 1625 + 25x + 625 &= 10000 \\ 50x + 2250 &= 10000 \\ 50x &= 7750 \\ x &= 155 \end{aligned}$$

Čiže pôvodné rozmery obdĺžnika sú 155 a 155 + 65 = 220 metrov.



Bodovanie: Za správne riešenia 5 bodov, za numerické chyby alebo drobné nedostatky od 4 do 5 bodov, za skúšanie bez rozumného systému do 3 bodov, za výsledok 1 bod, za iné nedostatočné riešenie do 0,5 bodu.

Príklad M2: Husi, kone, hlavy, nohy... *opravoval Peter Mitec Miťko*

Tento príklad sa dal riešiť len skúšaním. Ale myslím, že sami uznáte, že je rozdiel skúšať 20 možností a skúšať 3. A práve tento príklad vám mal ukázať, že keď už treba skúšať určitý počet možností, tak je dobré si ešte predtým uvedomiť (a potom ich aj použiť) všetky dostupné obmedzujúce kritéria, aby ste skúšali čo najmenej (veľmi podstatné to býva napríklad pri postupoch v počítači).

No a teraz k riešeniu: taká ovca zvykne mať 4 nohy a 1 hlavu, čiže spolu 5 častí tela a hus 2 nohy a tiež 1 hlavu, čo dáva 3 časti tela. V príklade sa píše, že všetkých častí tiel oviec aj husi je spolu 100 a teda vieme napísať rovnicu: 5.*o* + 3.*h* = 100. Pričom *o* je počet oviec a *h* počet husí. Ak by sme si chceli vyjadriť počet oviec, tak si rovnicu upravíme na tvar: **5.*o* = 100 – 3.*h***. A ak ovce majú byť celé, tak výraz **100 – 3.*h* musí byť deliteľný 5-timi**. 100 je násobok 5-tich a trojka nie, takže potom ***h* musí byť nutne** tiež **násobkom 5-tich**. Čiže husí bude na lúke buď 5, alebo 10. Prečo nie viac? Pretože v zadaní sa píše, že oviec je viacej ako husí, a keby husí bolo 15, tak oviec bude len 11. No a teraz už len stačí vypočítať, koľko bolo oviec, čo v prvom prípade je ((100 – 5.3) / 5 = **17**) a v druhom prípade **14**. No ale otázka bola: „Koľko koní sa páslo na lúke?" Vieme, že koní je 3-krát menej ako oviec a husí dokopy. Stačí teda spočítať 5 + 17 a 10 + 14 a zistiť, ktorý súčet je deliteľný 3-mi. Toto bola jedna z možností, ako sa dostať k výsledku, že na lúke je **8 koní.** Pravda mohli sme sa snažiť vyjadriť si najprv ovce. Potom **$3.h = 100 - 5.o$**. Ak si výraz **$100 - 5.o$** upravíme na tvar $5.(20 - o)$, tak počet oviec môže byť len 2, 5, 8, 11, 14, 17 a to je všetko, pretože na lúke nejaké husi určite boli. A od teraz bude už postup taký istý, ako keď sme si vyjadrovali ovce.

Mnohí z vás hľadali „nohohlavy" ako násobky 3 a 5, ale bez toho, aby zdôvodnili, prečo práve tých dvoch čísel. Odpoveď sa skrýva v našej rovnici (čo je asi zbytočné uvádzať;) $5.o + 3.h = 100$. Podľa mňa na to určite ľahko prídete, ale keby ste potrebovali predsa len pomoc, tak podľa mňa sa to dá najľahšie nájsť v rovnici, kde sme sa snažili vyjadriť si počet oviec ;-)

Bodovanie: Za správny výsledok som dával 1 bod a za postup 0 až 4 body. Strhával som po 0,5 bodu (ak ste napríklad neobmedzili počet skúšaných možností).

Príklad M3: Pána vetrov *opravovala Veronika X-ka Zelmanová*

Keď sa pozrieme na zadanie, zistíme, že Tornádo (T) má byť mladší ako Severák (S), ďalej S mladší ako Monzún (M) a M mladší ako T. Tieto tri tvrdenia však nemôžu byť súčasne pravdivé (potom by platilo, že tornádo je zároveň staršie aj mladšie ako S a M), preto jedno z týchto tvrdení musí byť nepravdivé.

Ak by neplatilo, že T je mladší ako S, tak musí platiť:

Južný vietor (J) je potom starší od M a T (je to v zadaní), a keďže Vánok (V) je mladší od M a S je mladší ako T, bude J starší aj ako V a S, čiže bude najstarší. Nasledovať bude T, pretože je starší od S a od M a V je mladší ako M. Stredný syn je M, pretože v zadaní je, že je starší aj ako S aj ako V. Ďalej sa narodil S, a nakoniec V (S je starší ako V). Vyšlo nám jedno jednoznačné riešene.

Ak by neplatilo tvrdenie: S je mladší ako M, tak

by sem vedeli, že M je mladší ako S, J a T. Mladší od M je už len V. Teraz vieme, kto je najmladší (V) a kto sa narodil ako predposledný (M). Ďalej vieme, že T je mladší aj ako S, aj ako J. Ale či bude starší J alebo S určiť nevieme, takže zvyšné platné tvrdenia by neurčili jednoznačne poradie synov.

Ak by neplatilo, že M je mladší ako T:

J je potom najstarší, je starší ako M a T, a M je starší ako V a S. Keďže M je starší aj ako T, je druhý najstarší. Stredný syn je S, pretože je starší aj ako V aj ako T. Ale kto je najmladší, či T alebo V, sa jednoznačne povedať nedá.

Jediné jednoznačné riešenie je: najstarší syn je Južný vietor, nasleduje Tornádo, potom Monzún, Severák a najmladší je Vánok.

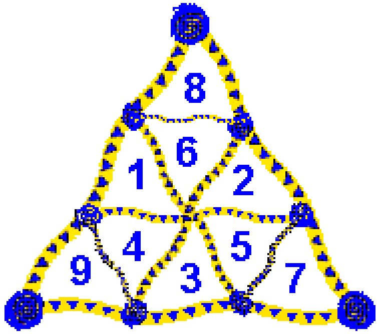
Bodovanie: 3 body – ak si mal správnu odpoveď, ale nebolo jasné ako si k výsledku prišiel a prečo neplatilo práve to jedno tvrdenie. 4,8 bodu ak si našiel všetkých 5 riešení, 3,5 bodu ak si mal nájdené 3 možné riešenia, ak 2, tak 2,5 bodu, ak len 1, tak 1,5 bodu.

Príklad M4: Popoludnie pri veterníku *opravovala Kami Vyslocká*

Poďme najprv na prvý bod úlohy. Máme do 9 malých trojuholníčkov vpísať čísla od 1 do 9 tak, aby súčet čísel bol v každom 4-dielnom trojuholníku 17 a v každom 5-dielnom lichobežníku 28. Súčet A + B + C + D + E + F + G + H + I = 45 (rozmyslite si prečo!) Pozrime si ale súčet 4-dielnych trojuholníkov:

(A + B + C + D) + (B + E + F +G) + (D + G + H + I) = 17 + 17 + 17 = 51.

Teda A + B + C + D + E + F + G + H + I + B + D + G = 45 + B + D + G = 51. Preto B + D + G = 6. A číslo 6 vieme získať z daných čísel len ako 1 + 2 + 3. (A samozrejme ešte ako 1 + 3 + 2, 2 + 1 + 3, 2 + 3 + 1, 3 + 2 + 1, 3 + 1 + 2 ak si všímame aj poradie.)



Vezmime si napr. B = 1, D = 2, G = 3. Potom je z obrázku jasné, že A + C = 14, E + F = 13 a H + I = 12. Z čísel 4, 5, 6, 7, 8, 9 vieme 14 dostať ako 9 + 5 = 8 + 6, číslo 13 ako 9 + 4 = 8 + 5 = 7 + 6 a číslo 12 ako 8 + 4 = 7 + 5. No a stačí už len chvíľka hrania s číslami a doplniť to tak, aby to sedelo a nič sa neopakovalo. Viď vpravo obrázok. Jasné, že to nie je jediné možné riešenie a na vás nechávam zamyslenie, koľko všetkých riešení má táto úloha.

Druhý bod úlohy. V každom 4-dielnom trojuholníku (teda aj v trojuholníku ABCD) má byť súčet 25. A v každom 5-dielnom lichobežníku (teda aj v lichobežníku EFGHI) má byť súčet 22. Teda spolu v ABCD + EFGHI by to malo byť 25 + 22 = 47. Lenže už sme zrátali, že A + B + C + D + E + F + G + H + I = 45 a 47 to teda nebude, ani keby čo bolo. Úloha nemá riešenie.

Tretí bod úlohy. Opäť ABCD+EFGHI je 45. No a 45: 2 = 22,5, teda ak chceme, aby súčet v trojuholníku ABCD bol rovnaký ako súčet v lichobežníku EFGHI, musel by ten súčet byť 22,5. A 22,5 ako súčet celých čísel veru nedostaneme. Ani táto úloha nemá riešenie.

Bodovanie: Prvý bod úlohy: Napísanie aspoň jedného riešenia 1 bod, napísanie postupu 0,5 bodu a zamyslenie sa nad počtom riešení 0,5 bodu. Druhý a rovnako tretí bod úlohy: Napísanie, že úloha nemá riešenie 1 bod a dôvod prečo ho nemá 0,5 bodu.

Príklad M5: Majstra tesára *opravoval Ľubor Illek*

Delostrelecká príprava: Vieme, že v rovnoramennom Δ je vrchol nad základňou rovnako vzdialený od oboch koncových bodov základne, preto tento vrchol leží na osi základne. Naopak, ľubovoľný bod osi základne okrem priesečníka osi so základňou môže byť vrcholom rovnoramenného Δ s touto základňou. Priesečník musíme vylúčiť, lebo vtedy by všetky tri vrcholy ležali na priamke, čiže by nevznikol Δ.

Riešenie: Vrchol S musí teda ležať na osi úsečky AB a súčasne na osi CD. Narysujeme preto tieto osi (os úsečky je kolmica vedená stredom úsečky) a tam kde sa pretnú je bod S.

Kedy nie je riešenie: Ak sa bod S nedá nájsť, príklad nemá riešenie. To je vtedy, ak sú osi rovnobežné, ale rôzne. To platí vtedy, ak sú úsečky AB, CD rovnobežné, ale nemajú spoločnú os. Ak sú naopak AB, CD rovnobežné, ale majú spoločnú os, riešení je nekonečne